UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

3856-71

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA UND N. HOFREITER
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

61. BAND, 1. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1957

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1957

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

61. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Blaney, H. On the Davenport-Heilbronn Theorem 1

Szász, F. A. Über die homomorphen Bilder des Ringes der ganzen Zahlen und über eine verwandte Ringfamilie 37

Izbicki, H. Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen 42

Weier, J. Über einen Erweiterungssatz 51

Hohenberg, F. Projektionen projektiver Räume 54

Alexandroff, P. Die Kontinua (V^n) — eine Verschärfung der Cantorschen Mannigfaltigkeiten 67

Buchbesprechungen 77

On the Davenport-Heilbronn Theorem

By

Hugh Blaney, Achimota, Gold Coast

(Received June 20, 1956)

Introduction. Let a, b, c, d be any real numbers with $|ad - bc| = 1$ and let

$$\lambda = ax + by, \ \mu = cx + dy.$$

For all integral values of x, y the points (λ, μ) define a plane homogeneous lattice of unit determinant. Various results are known about such a lattice and the corresponding non-homogeneous lattice $(\lambda + \lambda_0, \mu + \mu_0)$ where

$$\lambda_0 = ax_0 + by_0, \ \mu_0 = cx_0 + dy_0$$

and x_0, y_0 are any real numbers.

There is *Gauß*'s Theorem[1] on the minimum of a positive definite binary quadratic form which asserts that integers x, y not both zero can always be found to satisfy the inequality

$$\lambda^2 + \mu^2 \leqslant 2/\sqrt{3}.$$

This is best possible. There is no equivalent theorem in the non-homogeneous case.

There is the *Korkine-Zolotareff* Theorem[1] on the minimum of a homogeneous indefinite binary quadratic form:

$$|\lambda\mu| \leqslant 2/\sqrt{5}$$

for x, y not both zero and the corresponding *Minkowski* Theorem[1] in the non-homogeneous case:

$$|(\lambda + \lambda_0)(\mu + \mu_0)| \leqslant \tfrac{1}{4}$$

for some integers x, y. These results are best possible.

There is *Segre's* result (9):

[1] See, for example, *Hardy* and *Wright* (7) for proofs and references.

$$0 < \lambda\mu \leqslant 1$$

which may also be written:

$$0 \leqslant \lambda\mu < 1$$

for x, y not both zero. These are both best possible.

The corresponding result in the non-homogeneous case is the *Davenport-Heilbronn* Theorem (4) which asserts that for any real λ_0, μ_0 integers x, y exist for which

$$0 \leqslant Q = (\lambda + \lambda_0)\ (\mu + \mu_0) < 1$$

with, in fact, $\lambda + \lambda_0$, $\mu + \mu_0 \geqslant 0$. This result is best possible and not isolated in the sense that if the constant on the right is decreased there are an infinity of forms for which the inequality can no longer be satisfied. The proof shows also that the inequality $0 < Q \leqslant 1$ is soluble but this result is *not* best possible. Some time ago I established (3) the existence of a positive number ξ such that we may always satisfy the inequality

$$\xi \leqslant Q \leqslant 1$$

though not necessarily with $\lambda + \lambda_0$, $\mu + \mu_0$ both still positive.

My object in this paper is to detemine the best possible value for ξ. I prove

Theorem. *Let*

$$\xi = [0, \dot{8}, 1, 8, \dot{1}\dot{1}] = \tfrac{1}{2}(\sqrt{126} - 11)$$
$$= 0.1124, 8608, \ldots, \tag{1}$$

let a, b, c, d, λ_0, μ_0 be any real numbers with $|ad - bc| = 1$ and let

$$Q = (\lambda + \lambda_0)\,(\mu + \mu_0) = (ax + by + \lambda_0)\,(cx + dy + \mu_0).$$

Then there exist integers x, y for which

$$\xi \leqslant Q \leqslant 1. \tag{2}$$

This is true with strict inequality unless[2]

$$Q \sim xy,\ Q \sim \tfrac{1}{2}\, y(2x + y + 1) \text{ or } Q \sim \tfrac{1}{2}\, y\{2x + (1 + 2\xi)\, y + 1\}. \tag{3}$$

We may observe that this result is best possible and not isolated in the sense that if either the number ξ on the left is increased or the number unity on the right is decreased there are an infinity of forms Q for which the inequality can no longer be satisfied (see § 6).

---

[2] We say that Q is equivalent ($\sim$) to another form of this kind if one can be transformed into the other by a non-homogeneous substitution

$$x = px' + qy' + h,\ y = rx' + sy' + k,$$

with integral coefficients and determinant $ps - qr = \pm 1$.

Asymmetric inequalities of this type are not new. I established their existence for homogeneous and non-homogeneous indefinite quadratic forms in any number of variables in (1) and this particular result may be compared with those of Theorem 3 of (2).

The proof is divided into two parts. In Part I we consider forms for which at least one of the ratios a/b, c/d is rational so that $\lambda\mu = 0$ for integers x, y not both zero and in Part II those forms for which both these ratios are irrational so that $\lambda\mu=0$ only if $x=y=0$. The methods employed are purely arithmetical and depend on some elementary properties of continued fractions.

All the work for Part I and much of that of Part II was done in the Gold Coast.

PART I

2. *The Lemmas.* With the usual notation for continued fractions we have

$$\frac{p}{q}=\frac{p_n}{q_n}=[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{a_n}$$

where the a's are positive integers. We shall find it convenient to write

$$\frac{p'}{q'}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

so that

$$pq'-p'q=(-1)^n.$$

It is well known that if a_n is increased then p/q is increased or decreased as n is odd or even and that if p/q is the *nth* convergent to a continued fraction ζ, say, where

$$\zeta=[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots],$$

then

$$\frac{p}{q}\gtrless\zeta$$

as n is even or odd.

Besides the convergents to a continued fraction we shall also need to consider the secondary convergents. These we denote by p^*/q^*, when it is necessary to distinguish them from p/q, and they are defined by

$$\frac{p^*}{q^*}=[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\pm 1]=\frac{p\pm p'}{q\pm q'}$$

there being two for each value of n. Since, for example,

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n + 1] \gtrless [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots]$$

as n is odd or even we see that

$$\frac{p+p'}{q+q'} \gtrless \zeta \gtrless \frac{p-p'}{q-q'}$$

as n is odd or even.

The most important classical result in continued fractions that we shall need is[3]

Lemma A. If the fraction k/h is such that

$$\left|\frac{k}{h} - \zeta\right| < \frac{1}{h^2},$$

then k/h is either a convergent or a secondary convergent to ζ.

The remaining lemmas are mainly numerical.

Lemma.

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2} = \begin{cases} [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2] \; n \text{ odd}, \\ [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, a_n + 1, a_{n-1}, \ldots, a_2] \; n \text{ even}. \end{cases}$$

Proof. If n is odd, define $x(>0)$ by

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + x]$$

$$= \frac{p + xp'}{q + xq'}$$

so that

$$xq(pq' - p'q) + q + xq' = 0,$$

whence

$$x = q/(q - q') = [1, q/q' - 1] = [1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2]. \qquad (4)$$

This proves the result for n odd and the proof for n even is similar.

Corollaries. If $p/q = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 9]$, $(k \geqslant 0)$, where $(8, 1, 8, 11)_k$ indicates that this group of figures is repeated k times,

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2} = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10, 1, \ldots] < \xi, \qquad (5)$$

by (1).

If $p/q = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10]$, $(k \geqslant 0)$,

---

[3] *Fatou* (6) states the result without proof. For a proof see *Robinson* (8).

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,11,9,\ldots]<\xi. \tag{6}$$

If $p/q=[0,(2,4,2,44)_k,3]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2}=[0,(2,4,2,44)_k,2,4,44,\ldots]<4\,\xi \tag{7}$$

since $4\,\xi=[0,\dot{2},4,2,\dot{44}]$, by (1).

If $p/q=[0,(2,4,2,44)_k,2,3]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2}=[0,(2,4,2,44)_k,2,4,2,2,\ldots]<4\,\xi. \tag{8}$$

If $p/q=[0,(2,4,2,44)_k,2,4,3]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2}=[0,(2,4,2,44)_k,2,4,2,4,\ldots]<4\,\xi. \tag{9}$$

If $p/q=[0,(2,4,2,44)_k,2,4,2,43]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2}=[0,(2,4,2,44)_k,2,4,2,44,42,\ldots]<4\,\xi. \tag{10}$$

Lemma.

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{9q^2}=\begin{cases}[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,8,1,a_n-1,a_{n-1},\ldots,a_2]\ n \text{ odd},\\ [a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n-1,1,8,a_n,a_{n-1},\ldots,a_2]\ n \text{ even}.\end{cases}$$

Proof. If n is odd, define $x(>0)$ by

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{9q^2}=[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n,x]=\frac{p'+xp}{q'+xq}$$

so that

$$9\,q(pq'-p'q)+q'+xq=0,$$

whence

$$\begin{aligned}x&=9-q'/q=8+(q-q')/q\\&=[8,1,a_n-1,a_{n-1},\ldots,a_2],\end{aligned}$$

by (4).

This proves the result for n odd and the proof for n even is similar.

Corollaries. If $p/q=[0,(8,1,8,11)_k]$, $(k\geqslant 1)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{9q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,10,\ldots]<\xi. \tag{11}$$

If $p/q=[0,(8,1,8,11)_k,8,1]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{9q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,1,0,8,\ldots]$$
$$=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,9,\ldots]<\xi \tag{12}$$

since $[\ldots A,a,0,b,B,\ldots]=[\ldots A,a+b,B,\ldots]$.

Lemma. If $p/q=[0,(8,1,8,11)_k]$, $(k\geqslant 1)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{9q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,79,\ldots]. \tag{13}$$

Proof. Define $x(>0)$ by

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{9q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,x]$$
$$=\frac{p'+xp}{q'+xq}$$

so that

$$9q(pq'-p'q)+\xi(q'+xq)=0,$$

whence

$$x=\frac{9}{\xi}-\frac{q'}{q}=79{\cdot}9\ldots$$

since $9/\xi=80{\cdot}00\ldots$ and, for $q'/q=[0,(11,8,1,8)_k]$, $(k\geqslant 1)$,

$$0{\cdot}08<q'/q<0{\cdot}09.$$

This proves the result.

Corollary. Similarly, if $p/q=[0,(8,1,8,11)_k,8,1]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{9q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,79,\ldots]. \tag{14}$$

Lemma If $p/q=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,9]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,1,\ldots]. \tag{15}$$

Proof. We have

$$\frac{p-p'}{q-q'}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8].$$

Define $x(>0)$ by

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,x]$$
$$=\frac{p'+x(p-p')}{q'+x(q-q')}=\frac{xp+(1-x)p'}{xq+(1-x)q'}$$

so that

$$q(1-x)(pq'-p'q)+\xi\{xq+(1-x)q'\}=0,$$
$$x(q+\xi q'-\xi q)=q+\xi q',$$

whence

$$1<x=1+\frac{\xi q}{q+\xi q'-\xi q}<2.$$

This proves the result.

Lemma. If $p/q=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,10]$, $(k\geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,10,8,\ldots]. \tag{16}$$

Proof. Define $x(>0)$ by

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,8,1,8,10,x]$$
$$=\frac{p'+xp}{q'+xq}$$

so that

$$q(pq'-p'q)+\xi(q'+xq)=0,$$

whence

$$x=\frac{1}{\xi}-\frac{q'}{q}=8{\cdot}7\ldots$$

since $1/\xi=8{\cdot}88\ldots$ and, for $q'/q=[0,10,8,\ldots]$,

$$0{\cdot}09<q'/q<0{\cdot}10.$$

This proves the result.

Lemma. If $p/q=[0,(8,1,8,11)_k]$, $(k\geqslant 1)$,

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{q^2}>\xi. \tag{17}$$

Proof. Define $x(>0)$ by

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{q^2}=[0,(8,1,8,11)_k,x]$$
$$=\frac{p'+xp}{q'+xq}$$

so that

$$q(pq'-p'q)+\xi(q'+xq)=0,$$

whence

$$x = \frac{1}{\xi} - \frac{q'}{q} < \frac{1}{\xi} = [\dot{8}, 1, 8, \dot{1}\dot{1}].$$

This proves the result.

Corollary. If $\varrho = [0, (8, 1, 8, 11)_t, 8, 1, 8]$, $(t \geqslant k)$, then on replacing ξ by ϱ in the argument above we get

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{\varrho} - \frac{q'}{q} &< [8, 1, 8, 11] - [0, 11, 8] \\ &= \frac{889}{100} - \frac{8}{89} = \frac{78321}{8900} \\ &= [8, 1, 4, \ldots] < [8, 1, 8] \end{aligned}$$

which proves that

$$\frac{p}{q} + \frac{\varrho}{q^2} > \varrho. \tag{18}$$

Lemma. If $p/q = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1]$, $(k \geqslant 0)$,

$$\frac{p}{q} + \frac{\xi}{q^2} > \xi. \tag{19}$$

Proof. Define $x(> 0)$ by

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} + \frac{\xi}{q^2} &= [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, x] \\ &= \frac{p' + xp}{q' + xq} \end{aligned}$$

so that

$$q(pq' - p'q) + \xi(q' + xq) = 0,$$

whence

$$x = \frac{1}{\xi} - \frac{q'}{q} < [\dot{8}, 11, 8, \dot{1}]$$

since

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} - [\dot{8}, 11, 8, \dot{1}] &= \frac{1}{\xi} - \frac{8\xi + 89}{\xi + 11} \\ &= \frac{1}{\xi} - 8 - \frac{1}{\xi + 11} \\ &= \frac{2(\sqrt{126} + 11)}{5} - 8 - \frac{2(\sqrt{126} - 11)}{5} \\ &= \frac{4}{5} < [0, 1, 8, (11, 8, 1, 8)_k] = q'/q. \end{aligned}$$

This proves the result.

Corollary. If $\varrho = [0, (8, 1, 8, 11)_t, 8, 1, 8]$, $(t \geqslant k)$, then on replacing ξ by ϱ in the argument above we get (for $t \geqslant 1$)

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{\varrho} - \frac{q'}{q} &< [8, 1, 8, 11] - [0, 1, 8] \\ &= \frac{889}{100} - \frac{8}{9} = \frac{7201}{900} \\ &= [8, 900] \end{aligned}$$

which proves that, if $t > k$,

$$\frac{p}{q} + \frac{\varrho}{q^2} > \varrho \tag{20}$$

but if $t = k\ (\geqslant 0)$ we get $x = 8$ so that

$$\frac{p}{q} + \frac{\varrho}{q^2} = \varrho.$$

Lemma. If $p^*/q^* = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 9] = (p + p')/(q + q')$, $(k \geqslant 0)$,

$$\frac{p^*}{q^*} + \frac{1}{2q^*} - \frac{\xi}{2\,q^*} > \xi, \tag{21}$$

that is

$$2p^* + 1 > (2\,q^* + 1)\,\xi.$$

Proof. Since p/q is an even convergent to ξ, $p/q > \xi$ and it will suffice show that

$$\frac{2\,p^* + 1}{2\,q^* + 1} = \frac{2(p + p') + 1}{2(q + q') + 1} > \frac{p}{q},$$

that is

$$q - p > 2(pq' - p'q) = 2$$

which is so.

This proves the result.

Lemma. If $p^*/q^* = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10)] = (p - p')/(q - q')$, $(k \geqslant 0)$,

$$\frac{p^*}{q^*} + \frac{1}{2\,q^*} - \frac{\xi}{2\,q^*} > \xi, \tag{22}$$

that is

$$2\,p^* + 1 > (2\,q^* + 1)\,\xi.$$

Proof. Since p'/q' is an even convergent to ξ, $p'/q' > \xi$ and it will suffice to show that

$$\frac{2p^*+1}{2q^*+1}=\frac{2(p-p')+1}{2(q-q')+1}>\frac{p'}{q'},$$

that is

$$q'-p'>2(p'q-pq')=2$$

which is so.

This proves the result.

3. *Proof of the theorem (first part).* If at least one of a/b, c/d is rational, we may, after applying, if necessary, a unimodular non-homogeneous transformation with integral coefficients, with a change of notation write

$$Q=Q(x,y)=(x+\alpha y+\beta)(y+\gamma)$$

where

$$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma<1.$$

We suppose that (2) has no solution with strict inequality on both sides, that is that

$$\xi<Q<1$$

has no solution, and proceed to show this is false except in the three cases of (3).

Case (*i*). Suppose $\gamma>0$. If $0<\gamma\leqslant\frac{1}{2}$, $\exists\, m$.

$$Q(m,0)=(m+\beta)\gamma\leqslant\xi<(m+1+\beta)\gamma\leqslant\xi+\gamma<1.$$

If $\frac{1}{2}<\gamma<1$, $\exists\, m$.

$$Q(-m,-1)=(m+\alpha-\beta)(1-\gamma)\leqslant$$
$$\leqslant\xi<(m+1+\alpha-\beta)(1-\gamma)\leqslant\xi+1-\gamma<1.$$

Hence

$$\gamma=0.$$

Case (*ii*). If $\alpha=\beta=0$, $Q=xy$ which clearly requires equality on the right of (2). See (3).

If $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, either $\xi<Q(0,1)=\alpha<1$ or $\exists\, m\ (\geqslant 1)$.

$$Q(0,m)=m^2\alpha\leqslant\xi<(m+1)^2\alpha\leqslant 4m^2\alpha\leqslant 4\xi<1.$$

If $\alpha=0$, $\beta\neq 0$, either $\xi<Q(0,1)=\beta<1$ or

$$\xi<Q(-1,-1)=1-\beta<1.$$

Hence

$$0<\alpha,\beta<1,\ 0<\alpha+\beta<2.$$

Case (*iii*). If $0<\alpha+\beta\leqslant\xi$, $\exists m\ (\geqslant 1)$.

$$Q(0, m) = m(m\alpha + \beta) \leqslant \xi < (m+1)\{(m+1)\alpha + \beta\}$$
$$= m(m\alpha + \beta) + (2m+1)\alpha + \beta$$
$$< \xi + 2\xi/m + \xi \leqslant 4\xi < 1.$$

If $\xi < \alpha + \beta < 1$, $\xi < Q(0, 1) = \alpha + \beta < 1$.

If $1 + \xi < \alpha + \beta < 2$, $\xi < Q(-1, 1) = \alpha + \beta - 1 < 1$.

Hence

$$1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1 + \xi. \tag{23}$$

Case (*iv*). If $\beta > \alpha$, since $\beta < 1$ we have $0 < \alpha - \beta + 1 < 1$.

If $\xi < \alpha - \beta + 1 < 1$, $\xi < Q(-1, -1) = 1 + \alpha - \beta < 1$.

If $0 < \alpha - \beta + 1 \leqslant \xi$, put $\beta = 1 - \delta$ so that $0 < \alpha + \delta \leqslant \xi$ and $\exists m\ (\geqslant 1)$.

$$Q(-1, -m) = m(m\alpha + \delta) \leqslant \xi < (m+1)\{(m+1)\alpha + \delta\} < 1,$$

as in Case (iii). Hence

$$\alpha \geqslant \beta.$$

Case (*v*). If $\alpha - \beta > \xi$, $\xi < Q(0, -1) = \alpha - \beta < 1$.

Hence

$$0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \xi. \tag{24}$$

Case (*vi*). If $\alpha = \frac{1}{2}$, since $\alpha + \beta \geqslant 1$ and $\alpha \geqslant \beta$ we have $\beta = \frac{1}{2}$ also and $Q = \frac{1}{2}\, y(2x + y + 1)$ which clearly requires equality on the right of (2). See (3). Hence, by (23) and (24),

$$\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \frac{1}{2} + \xi$$

and putting

$$\alpha = \frac{1}{2} + v,\ \beta = \frac{1}{2} \pm w,$$

as the case may be so that we may suppose $w \geqslant 0$, we have

$$0 < v \leqslant \xi,\ 0 \leqslant v \pm w \leqslant \xi$$

and

$$Q = Q(x, y) = \tfrac{1}{2}\, y(2vy \pm 2w + 2x + y + 1).$$

We shall find it convenient now to change our notation for Q by putting $2x + y + 1 = -z$, so that y and z are of opposite parity, and writing

$$Q_{\pm} = Q(y, z) = \tfrac{1}{2}\, y(2vy \pm 2w - z).$$

Since the signs of both y and z can be changed we note that both Q_- and Q_+ have to be considered.

4. We now suppose than that neither of the inequalities

$$\xi < Q_{\pm} < 1$$

has a solution, where

$$Q_{\pm} = \tfrac{1}{2}\, y(2\, vy \pm 2\, w - z)$$

and

$$0 < v \leqslant \xi,\ 0 \leqslant v \pm w \leqslant \xi,\ w \geqslant 0,$$

and the next stage in the proof is to show that, under this supposition, $v = \xi$, $w = 0$. The important parameter here is v. In the process of covering the range for v that for w automatically reduces to zero.

Case (i). If $0 < v < \dfrac{1}{9}$, since $\xi < \dfrac{9}{25}$ $\exists\, m(\geqslant 2)$.

$$\frac{\xi}{(2m-1)^2} < v < \frac{1}{(2\,m-1)^2}.$$

With this value of m, taking $y = 2\,m - 1$, $z = 0$, we have either

$$\xi < Q_{\pm} = (2\,m-1)\,\{(2\,m-1)\,v \pm w\} < 1,$$

for at least one determination of the sign, or else

$$Q_{-} \leqslant \xi \text{ and } Q_{+} \geqslant 1$$

in which case

$$2\,v \geqslant 2\,w \geqslant (1-\xi)/(2\,m-1),$$

and

$$Q_{-} = (2\,m-1)\,\}(2\,m-1)\,v - w\} \geqslant$$
$$\geqslant (2\,m-1)\,\{2(m-1)\,v\} \geqslant (m-1)\,(1-\xi) > \xi,$$

a contradiction. Hence

$$\frac{1}{9} \leqslant v \leqslant \xi.$$

Case (ii). If $\dfrac{1}{9} \leqslant v < \dfrac{11}{98}$, we have, in fact

$$\frac{3}{28} + \frac{\xi}{14^2} < v < \frac{3}{28} + \frac{1}{14^2}$$

because $\dfrac{3}{28} + \dfrac{\xi}{14^2} < \dfrac{1}{9}$ since $\xi < \dfrac{7}{9}$. With $y = 14$, $z = 3$ we now have either

$$\xi < Q_{\pm} = 7(28\,v \pm 2\,w - 3) < 1,$$

for at least one determination of the sign, or else

$$Q_{-} \leqslant \xi \text{ and } Q_{+} \geqslant 1$$

in which case

$$w \geqslant (1-\xi)/28$$

so that, since

$$\xi < \frac{4}{29},$$

$$v+w > \frac{3}{28}+\frac{\xi}{14^2}+\frac{1}{28}-\frac{\xi}{28}$$

$$> \frac{1}{7}-\frac{\xi}{28} > \xi,$$

a contradiction since $v+w \leqslant \xi$. Hence

$$\frac{11}{98} \leqslant v \leqslant \xi. \tag{25}$$

Case (*iii*). Let p/q be any odd convergent to ξ. Then q is odd and putting $y = 3q$, $z = 6p$ we have

$$Q_{\pm} = 3q(3qv \pm w - 3p).$$

If

$$\frac{p}{q}+\frac{\xi}{9q^2} < v < \frac{p}{q}+\frac{1}{9q^2},$$

we have either $\xi < Q_{\pm} < 1$, for at least one determination of the sign, or else $Q_- \leqslant \xi$ and $Q_+ \geqslant 1$, in which case

$$w \geqslant (1-\xi)/(6q)$$

so that

$$v+w > \frac{p}{q}+\frac{\xi}{9q^2}+\frac{1}{6q}-\frac{\xi}{6q}$$

$$> \frac{6p+1}{6q}-\frac{\xi}{6q} > \xi$$

if

$$\frac{6p+1}{6q+1} > \frac{p'}{q'} \ (> \xi),$$

that is if

$$q'-p' > 6$$

which is certainly true if p/q is the third or any later (odd) convergent. Hence we have a contradiction and, by (11), (12), (13) and (14), we see that v does *not* lie in any of the ranges

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 79, \ldots]$$

to

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 10, \ldots], \ (k \geqslant 1), \tag{26}$$

and

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 79, \ldots]$$

to

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 9, \ldots], \ (k \geqslant 0). \tag{27}$$

Now $[0, 8, 1, 79, \ldots] < \dfrac{11}{98} = [0, 8, 1, 10] < [0, 8, 1, 8, 9, \ldots]$ and

$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 10, \ldots] > [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 79, \ldots]$

so that, by (25), (26) and (27), we now have

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 9, \ldots] \leqslant v$$

$$\leqslant [0, (8, 1, 8, 11)_{k+1}, 79, \ldots], \ (k \geqslant 0), \tag{28}$$

or

$$v = \xi.$$

Case (*iv*). Now let p^*/q^* be any secondary convergent to ξ which is less than ξ. Then

$$p^*/q^* = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 9]$$

or

$$p^*/q^* = [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10], \ (k \geqslant 0),$$

and q^* is odd. Putting $y = q^*$, $z = 2\,p^*$, we have

$$Q_{\pm} = q^*(q^*\,v \pm w - p^*).$$

If

$$\frac{p^*}{q^*} + \frac{\xi}{q^{*2}} < v < \frac{p^*}{q^*} + \frac{1}{q^{*2}}$$

we have either $\xi < Q_{\pm} < 1$, for at least one determination of the sign, or else $Q_- \leqslant \xi$ and $Q_{\pm} \geqslant 1$ in which case

$$w \geqslant (1 - \xi)/(2\,q^*)$$

so that

$$v + w > \frac{p^*}{q^*} + \frac{\xi}{q^{*2}} + \frac{1}{2\,q^*} - \frac{\xi}{2\,q^*}$$

$$> \frac{p^*}{q^*} + \frac{1}{2\,q^*} - \frac{\xi}{2\,q^*} > \xi,$$

by (21) or (22) as the case may be. Hence we have a contradiction and, by (5), (6), (15) and (16), we see that v does *not* lie in any of the ranges

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 1, \ldots]$$

to

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10, 1, \ldots], \ (k \geqslant 0), \tag{29}$$

and

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10, 8, \ldots]$$

to

$$[0, (8, 1, 8, 11)_{k+1}, 9, \ldots], \ (k \geqslant 0). \tag{30}$$

Now

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10, 1, \ldots]$$
$$> [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 10, 8, \ldots],$$

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 1, \ldots] < [0, (8, 1, 8, 11)_k, 8, 1, 8, 9, \ldots]$$

and

$$[0, (8, 1, 8, 11)_k, 9, \ldots] > [0, (8, 1, 8, 11)_k, 79, \ldots]$$

so that, by (28), (29) and (30), we now have

$$v = \xi, \ w = 0.$$

Hence

$$Q = \tfrac{1}{2}\, y(2\,\xi y - z), \tag{31}$$

where y and z are of opposite parity, or, in our original notation,

$$\begin{aligned} Q = Q(x, y) &= \tfrac{1}{2}\, y\{2\,\xi y + (2\,x + y + 1)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\, y\{2\,x + (1 + 2\,\xi)\, y + 1\}. \end{aligned}$$

5. It is clear that Q as defined by (31) satisfies $Q = \xi$ and we must now show that $\xi < Q < 1$ has no solution.

If y is odd, put $y = q$, $z = 2\,p$ and we have

$$Q = q(\xi q - p)$$

so that

$$\xi - \frac{p}{q} = \frac{Q}{q^2}.$$

By Lemma A, if $Q < 1$, p/q is a convergent or a secondary convergent to ξ and, for $Q > 0$, we must have $p/q < \xi$ as well. Thus p/q is an odd convergent or one of the secondary convergents considered in (5) and (6) above (and in Case (iv) of § 4).

If p/q is an odd convergent to ξ, other than the first, we have, by (17) and (19),

$$\frac{p}{q} + \frac{\xi}{q^2} > \xi$$

so that

$$\xi - \frac{p}{q} < \frac{\xi}{q^2},$$

that is

$$Q < \xi.$$

In view of this result we must now take the case $y = 3q$, $z = 6q$, $Q = 9q(\xi q - p)$, so that

$$\xi - \frac{p}{q} = \frac{Q}{9q^2}.$$

We now have, by (11) and (12),

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2} < \xi$$

so that

$$\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{9q^2},$$

that is

$$Q > 1.$$

If p/q is the first convergent to ξ, corresponding to the above we clearly have $Q = \xi$ and $Q = 9\xi > 1$, respectively.

If p/q is now a secondary convergent to ξ and $p/q < \xi$, we have, by (5) and (6),

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2} < \xi$$

so that

$$\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{q^2},$$

that is

$$Q > 1.$$

If y is even, put $y = 2q$, $z = p$, where p is odd, and we have

$$Q = q(4\xi q - p)$$

so that

$$4\xi - \frac{p}{q} = \frac{Q}{q^2}.$$

By Lemma A again, if $Q < 1$, p/q is now a convergent or a secondary convergent to 4ξ and, for $Q > 0$, we must have $p/q < 4\xi$ as well. Thus p/q is an odd convergent or one of the secondary convergents

considered in (7), (8), (9) and (10) above. Now the odd convergents to $4\xi = [0, \dot{2}, 4, 2, 44]$ all have even numerators and are thus excluded since $z = p$ is odd. Hence p/q is a secondary convergent to 4ξ, $p/q < 4\xi$ and, by (7), (8), (9) and (10), we have

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2} < 4\xi$$

so that

$$4\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{q^2},$$

that is

$$Q > 1.$$

Hence $Q = \frac{1}{2}y\{(2x + (1 + 2\xi)y + 1\}$ requires equality on the left of (2). See (3).

This completes the proof of this part of the theorem.

6. *Note.* If in § 5 we replace ξ by the even convergent

$$\varrho = [0, (8, 1, 8, 11)_t, 8, 1, 8], \quad (t \geqslant 0),$$

the argument shows, by (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) and (12), since $\varrho > \xi$, and by (18) and (20), that

$$\varrho < Q < 1$$

has no solution for

$$Q = \tfrac{1}{2}y(2\varrho y - z).$$

(We may note that the corresponding result for the other even convergents to ξ, other than the first (1/8), does not hold.)

We have $Q = \varrho$, of course, for, with the obvious interpretation,

$$\frac{z/2}{y} = \frac{0}{1} \text{ or } [0, (8, 1, 8, 11)_t, 8, 1].$$

Since $\varrho > \xi$ for $t = 0, 1, 2, \ldots$, this shows that (2) is not isolated on the left in the sense used in § 1.

Again, if

$$Q = y(x - \frac{y}{n}), \quad (n \geqslant 2),$$

the inequality

$$0 < Q < 1 - \frac{1}{n}$$

clearly has no solution. Hence (2) is not isolated on the right.

PART II

7. *The Lemma.* We must now consider the case when a/b and c/d are both irrational. We shall find it convenient to revise our notation. Corresponding to the homogeneous form $Q(x, y) = (ax + by)(cx + dy)$ there is, by the theory of *Frobenius*[4], an infinite chain of reduced forms which may be written

$$Q(x, y) = Q_n(x, y) = (-)^n(x + \theta_n y)(x - \theta'_n y)/\Delta_n$$
$$= \tfrac{1}{2}(-)^n\{a_n(x + f_n y)^2 - y^2/a_n\},$$

where $\theta_n = [g_n, g_{n+1}, g_{n+2}, \cdots]$, $\theta'_n = [0, g_{n-1}, g_{n-2}, \cdots]$, the g's are positive integers, $a_n = 2/\Delta_n$, $\Delta_n = \theta_n + \theta'_n$ and $f_n = \tfrac{1}{2}(\theta_n - \theta'_n)$.

We note that a_n is a value of $2(-)^n Q_n(x, y)$ with $(x, y) = 1$ but there may be other such values with modulus < 2 which do not occur in the sequence of a's.

When n is even, for a_n, θ_n, θ'_n, Δ_n we shall write simply a, θ, θ', Δ and, when n is odd, b, ϕ, ϕ', D. Then the non-homogeneous form may be written as

$$Q = \tfrac{1}{2}\{a(x + \alpha)^2 - (y + \beta)^2/a\} \tag{32}$$

with $a > 0$ or

$$Q = \tfrac{1}{2}\{-b(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2/b\} \tag{33}$$

with $b > 0$ where, in each case, $\beta = y_0$ is constant and

$$\alpha = x_0 + f_n(y + \beta)$$

depends only on y.

In the lemma we determine certain ranges of values of a_n, or of θ_n and θ'_n, for which the inequality

$$\xi < Q < 1 \tag{34}$$

has a solution. To prove the theorem we then show that for all doubly infinite sequences of positive integers $\{g_n\}$ there is an a_n, or a θ_n and a θ'_n, in one of these ranges or else that we can find a value of $2(-)^n Q_n(x,y)$ with $(x, y) = 1$, other than a_n itself, which is in one of these ranges of a_n. For if c is such a value we can, after applying a unimodular homogeneous transformation with integral coefficients, suppose that $2(-)^n Q_n(1, 0) = c$ and, on completing the square, express the corresponding non-homogeneous form as in (32) if $c > 0$ with $a = c$ or as in (33) if $c < 0$ with $b = -c$.

---

[4] See for example, *Dickson* (5).

Starting with the following values obtained from (1) correct to the fourth decimal place

$$\xi = 0{\cdot}1124\ldots, \qquad \xi^2 = 0{\cdot}0126\ldots,$$
$$4\,\xi = 0{\cdot}4499\ldots, \qquad 4\,\xi^2 = 0{\cdot}0506\ldots,$$
$$16\,\xi = 1{\cdot}7997\ldots, \qquad 16\,\xi^2 = 0{\cdot}2024\ldots,$$
$$2(1+\xi) = 2{\cdot}2249\ldots, \qquad {}^1/_4(1-\xi) = 0{\cdot}2218\ldots,$$

we work to four decimal places rounding off always on the side of safety. The process is necessarily rather long and tedious.

Finally we note, by the transformation

$$x' = x + g_n y,\ y' = -y,$$

that the sequence $\{g_n\}$ is reversible.

Lemma. The inequality (34) is soluble in the following fourteen cases.

Case (*i*).

$$0 < a < 0{\cdot}5516, \text{ that is } \Delta > 3{\cdot}6259. \tag{35}$$

Proof. In (32) choose y so that $|\,y+\beta\,| \leqslant {}^1/_2$.
This fixes a. Then choose x so that

$$\{2\,\xi a + (y+\beta)^2\}^{\frac{1}{2}} < a(x+\alpha) \leqslant \{2\,\xi a + (y+\beta)^2\}^{\frac{1}{2}} + a$$

and we have

$$\xi < Q \leqslant \xi + \{2\,\xi a + (y+\beta)^2\}^{\frac{1}{2}} + {}^1/_2 a$$
$$\leqslant \xi + {}^1/_2\sqrt{(1+8\,\xi a)} + {}^1/_2 a < 1$$

if

$$8\,\xi a + 1 < \{2(1-\xi) - a\}^2,$$

or

$$a^2 - 4(1+\xi)\,a + 4(1-\xi)^2 - 1 > 0.$$

That is if

$$a < 2(1+\xi) - \sqrt{(1+16\,\xi)} \tag{36}$$

which is

$$> 2{\cdot}2249 - \sqrt{2{\cdot}7998} > 2{\cdot}2249 - 1{\cdot}6733$$
$$= 0{\cdot}5516.$$

Hence if (35) then *a fortiori* (36).

This proves the result.

Case (*ii*).

$$0{\cdot}6251 < a < 0{\cdot}8888, \text{ that is } 2{\cdot}25 < \Delta < 3{\cdot}1994. \tag{37}$$

Proof. Choose y so that $|\,y+\beta\,| \leqslant {}^1/_2$ and then choose x so that

$$1 \leqslant |\,x+\alpha\,| \leqslant {}^3/_2.$$

Then

$$Q \geqslant a/2 - 1/(8\,a) > \xi$$

if

$$4\,a^2 - 8\,\xi a - 1 > 0,$$

that is if

$$a > \xi + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + 4\,\xi^2)}$$

which is

$$< 0{\cdot}1125 + \sqrt{0{\cdot}2627} < 0{\cdot}1126 + 0{\cdot}5126 = 0{\cdot}6251$$

and

$$Q \leqslant 9\,a/8 < 1$$

if

$$a < 0{\cdot}8888.$$

This proves the result,

Case (*iii*).

$$0{\cdot}9799 < a < 1, \text{ that is } 2 < \Delta < 2{\cdot}0410. \tag{38}$$

Proof. Choose y so that $|\,y + \beta\,| \leqslant \tfrac{1}{2}$.

If $(y + \beta)^2 < a(a - 8\,\xi)/4$, choose x so that $\tfrac{1}{2} \leqslant |\,x + \alpha\,| \leqslant 1$ and we have

$$\xi < Q < a/2 < \tfrac{1}{2} < 1.$$

If $(y + \beta)^2 \geqslant a(a - 8\,\xi)/4$, we can find another value of y for which

$$\tfrac{1}{2} \leqslant |\,y + \beta\,| \leqslant 1 - \tfrac{1}{2}\{a(a - 8\,\xi)\}^{\frac{1}{2}}$$

and then choose x so that $1 \leqslant |\,x + \alpha\,| \leqslant {}^3/_2$.

Then

$$Q \leqslant 9\,a/8 - 1/(8\,a) < 1$$

if

$$a < 1$$

and

$$Q \geqslant a/2 - [2 - \{a(a - 8\,\xi)\}^{\frac{1}{2}}]^2/(8\,a)$$
$$= 3\,a/8 - 1/(2\,a) + \{(a - 8\,\xi)/(4\,a)\}^{\frac{1}{2}} + \xi < \xi$$

if

$$3\,a^2 - 4 + 4\,\{a(a - 8\,\xi)\}^{\frac{1}{2}} > 0.$$

This is true if

$$f(a) = 3\,a^2 - 4 + 4\,\{a(a - 0{\cdot}8999)\}^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Now

$$f(0{\cdot}9799) > 2{\cdot}8806 - 4 + 4\sqrt{(0{\cdot}9799\ .\ 0{\cdot}0800)}$$
$$> 2{\cdot}8806 - 4 + \sqrt{1{\cdot}2542} > 2{\cdot}8806 - 4 + 1{\cdot}1199$$
$$= 0{\cdot}0005.$$

This proves the result.

Case (*iv*).

$$1{\cdot}5466 < a < 2, \text{ that is } 1 < \Delta < 1{\cdot}2931. \tag{39}$$

Proof. Choose y so that $|y+\beta| \leqslant \frac{1}{2}$ and then choose x so that $\frac{1}{2} \leqslant |x+\alpha| \leqslant 1$ and we have

$$Q \leqslant a/2 < 1$$

if

$$a < 2$$

and

$$Q \geqslant a/8 - 1/(8a) > \xi$$

if

$$a^2 - 8\xi a - 1 > 0,$$

that is if

$$a > 4\xi + \sqrt{(1+16\xi^2)}$$

which is

$$\begin{aligned} &< 0{\cdot}4500 + \sqrt{1{\cdot}2025} < 0{\cdot}4500 + 1{\cdot}0966 \\ &= 1{\cdot}5466. \end{aligned}$$

This proves the result.

Case (*v*).

$$0{\cdot}1834 < b < 0{\cdot}6465, \text{ that is } 3{\cdot}0936 < D < 10{\cdot}9051. \tag{40}$$

Proof. In (33) choose y so that $\frac{1}{2} \leqslant |y+\beta| \leqslant 1$.

If $\frac{1}{2} \leqslant |y+\beta| < \sqrt{(2b)}$, choose x so that $|x+\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ and we have

$$1 > Q \geqslant 1/(8b) - b/8 > \xi$$

if

$$b^2 + 8\xi b - 1 < 0,$$

that is if

$$b < -4\xi + \sqrt{(1+16\xi^2)}$$

which is

$$\begin{aligned} &> -0{\cdot}4500 + \sqrt{1{\cdot}2024} > -0{\cdot}4500 + 1{\cdot}0965 \\ &= 0{\cdot}6465. \end{aligned}$$

If $\sqrt{(2b)} \leqslant |y+\beta| \leqslant 1$, choose x so that

$$\{(y+\beta)^2 - 2b\}^{\frac{1}{2}} < b(x+\alpha) \leqslant \{(y+\beta)^2 - 2b\}^{\frac{1}{2}} + b$$

and we have

$$\begin{aligned} 1 > Q &\geqslant 1 - b/2 - \{(y+\beta)^2 - 2b\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant 1 - b/2 - \sqrt{(1-2b)} > \xi \end{aligned}$$

if

$$b^2 + 4(1+\xi)\,b + 4(1-\xi)^2 - 4 > 0,$$

that is if

$$b > -2(1+\xi) + 2\sqrt{(1+4\xi)}$$

which is

$$< -2{\cdot}2249 + \sqrt{5{\cdot}7998} < -2{\cdot}2249 + 2{\cdot}4082$$
$$= 0{\cdot}1834.$$

This proves the result.

Case (*vi*).

$$1{\cdot}125 < b < 1{\cdot}5999, \text{ that is } 1{\cdot}2501 < D < 1{\cdot}7777. \qquad (41)$$

Proof. Choose y so that $1 \leqslant |\, y+\beta \,| \leqslant {}^3/_2$ and then choose x so that $|\, x+\alpha \,| \leqslant \frac{1}{2}$ and we have

$$Q \leqslant 9/(8\,b) < 1$$

if

$$b > 1{\cdot}125$$

and

$$Q \geqslant 1/(2\,b) - b/8 > \xi$$

if

$$b^2 + 8\,\xi b - 4 < 0,$$

that is if

$$b > -4\,\xi + 2\sqrt{(1+4\,\xi^2)}$$

which is

$$> -0{\cdot}4500 + \sqrt{4{\cdot}2024} > -0{\cdot}4500 + 2{\cdot}0499$$
$$= 1{\cdot}5999.$$

This proves the result.

Case (*vii*).

$$3{\cdot}125 < b < 3{\cdot}5752. \qquad (42)$$

Proof. Choose y so that $2 \leqslant |\, y+\beta \,| \leqslant {}^5/_2$ and then choose x so that $|\, x+\alpha \,| \leqslant \frac{1}{2}$ and we have

$$Q \leqslant 25/(8\,b) < 1$$

if

$$b > 3{\cdot}125$$

and

$$Q \geqslant 2/b - b/8 > \xi$$

if

$$b^2 + 8\,\xi b - 16 < 0,$$

that is if

$$b < -4\xi + 4\sqrt{(1+4\xi^2)}$$

which is

$$\begin{aligned} &> -0{\cdot}4500 + \sqrt{16{\cdot}2024} > -0{\cdot}4500 + 4{\cdot}0252 \\ &= 3{\cdot}5752. \end{aligned}$$

This proves the result.

Case (viii).

$$2{\cdot}01 < \theta < 2{\cdot}0286 \text{ and } 0{\cdot}01 < \theta' < 0{\cdot}0286. \tag{43}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} Q(x, y) = Q &= \tfrac{1}{2}\{a(x + \beta y + \alpha)^2 - (y + \beta)^2/a\} \\ &= [\{x + \tfrac{1}{2}(\theta - \theta')\, y + \alpha\}^2 - \tfrac{1}{4}\Delta^2(y + \beta)^2]/\Delta \end{aligned}$$

where now $\alpha = x_0 + \beta y_0 = x_0 + \beta\beta$ is constant and we may, without loss of generality, suppose that

$$0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Now

$$\begin{aligned} Q(1, 0) &= \{(1+\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\beta^2\}/\Delta > (1 - \Delta^2/16)/\Delta \\ &> 1/2{\cdot}0572 - 2{\cdot}0572/16 > 0{\cdot}4860 - 0{\cdot}1286 \\ &= 0{\cdot}3574 > \xi, \end{aligned}$$

since $1/\Delta - \Delta/16$ decreases as Δ increases, and

$$Q(-1, 0) = \{(1-\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\beta^2\}/\Delta < 1.$$

Hence we have a solution of (34) unless both $Q(1, 0) > 1$ and $Q(-1, 0) < \xi$, that is both

$$(1+\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\beta^2 < \Delta$$

and

$$(1-\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\beta^2 < \xi\Delta.$$

Hence

$$\begin{aligned} \alpha &> \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,\Delta \\ &> 0{\cdot}2218\ .\ 2{\cdot}02 \\ &> 0{\cdot}4480 \end{aligned}$$

and $\alpha \leqslant \tfrac{1}{2}$ anyway.

Moreover

$$\begin{aligned} \beta &\geqslant \{4(1-\alpha)^2/\Delta^2 - 4\,\xi/\Delta\}^{\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt{(1 - 4\,\xi\Delta)}/\Delta \\ &> \sqrt{(1 - 0{\cdot}4500\ .\ 2{\cdot}0572)}/2{\cdot}0572 \\ &> \sqrt{0{\cdot}0742}/2{\cdot}0572 > 0{\cdot}2723/2{\cdot}0572 \\ &> 0{\cdot}1323, \end{aligned}$$

since $\sqrt{(1-4\,\xi\Delta)}/\Delta$ decreases as Δ increases for $\Delta < 4{\cdot}4444$, and

$$\begin{aligned}\beta &\leqslant \{4(1+\alpha)^2/\Delta^2 - 4/\Delta\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{(9-4\,\Delta)}/\Delta \\ &< \sqrt{(9-4\,.\,2{\cdot}02)}/2{\cdot}02 \\ &= \sqrt{0{\cdot}92}/2{\cdot}02 < 0{\cdot}9592/2{\cdot}02 \\ &< 0{\cdot}4749\end{aligned}$$

since $\sqrt{(9-4\,\Delta)}/\Delta$ decreases as Δ increases for $\Delta < 4{\cdot}5$.

Now

$$\begin{aligned}Q(2,-1) &= \{2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta+\theta') + \alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,\Delta \\ &> (2 - 1{\cdot}0093 + 0{\cdot}4480)^2/2{\cdot}0572 - (1 - 0{\cdot}1323)^2\ .\ 0{\cdot}5143 \\ &= 1{\cdot}4387^2/2{\cdot}0572 - 0{\cdot}8677^2\ .\ 0{\cdot}5143 \\ &> 1{\cdot}0061 - 0{\cdot}3873 \\ &= 0{\cdot}6188 > \xi\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}Q(2,-1) &< (2 - 0{\cdot}9907 + 0{\cdot}5)^2/2{\cdot}02 - (1 - 0{\cdot}4749)^2\ .\ 0{\cdot}505 \\ &= 1{\cdot}5093^2/2{\cdot}02 - 0{\cdot}5251^2\ .\ 0{\cdot}505 \\ &< 1{\cdot}1279 - 0{\cdot}1393 \\ &= 0{\cdot}9886 < 1.\end{aligned}$$

This proves the result.

Case (*ix*).

$$1 < \theta < 1{\cdot}1112 \text{ and } 0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264. \tag{44}$$

Proof. As above, we have

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} \geqslant \alpha &> {}^1/_4(1-\xi)\,\Delta > 0{\cdot}2218\ .\ 1{\cdot}5 \\ &= 0{\cdot}3327\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} \geqslant \beta &> \sqrt{(1-4\,\xi\Delta)}/\Delta > \sqrt{(1 - 0{\cdot}4500\ .\ 1{\cdot}6373/1{\cdot}6376} \\ &> \sqrt{0{\cdot}2630/1{\cdot}6376} > 0{\cdot}5128/1{\cdot}6376 \\ &> 0{\cdot}3131.\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}Q(1,-1) &= \{1 - \tfrac{1}{2}(\theta-\theta') + \alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,\Delta \\ &> (1 - 0{\cdot}3056 + 0{\cdot}3327)^2/1{\cdot}6376 - (1 - 0{\cdot}3131)^2\ .\ 0{\cdot}4094 \\ &= 1{\cdot}0271^2/1{\cdot}6376 - 0{\cdot}6869^2\ .\ 0{\cdot}4094 \\ &> 0{\cdot}6441 - 0{\cdot}1933 \\ &= 0{\cdot}4508 > \xi\end{aligned}$$

and

$$Q(1,-1) < (1-0{\cdot}2368+0{\cdot}5)^2/1{\cdot}5 - 1{\cdot}5/16$$
$$= 1{\cdot}2632^2/1{\cdot}5 - 1{\cdot}5/16 < 1{\cdot}0638 - 0{\cdot}0937$$
$$= 0{\cdot}9701 < 1.$$

This proves the result.

Case (x).

$$1{\cdot}5 < \theta < 1{\cdot}5264 \text{ and } 0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264. \tag{45}$$

Proof. As above, we have

$$\tfrac{1}{2} \geqslant \alpha > \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,\Delta > 0{\cdot}2218\,.\,2$$
$$= 0{\cdot}4436$$

and

$$\tfrac{1}{2} \geqslant \beta > \sqrt{(1-4\,\xi\Delta)}/\Delta > \sqrt{(1-0{\cdot}4500\,.\,2{\cdot}0528)}/2{\cdot}0528$$
$$> \sqrt{0{\cdot}0762}/2{\cdot}0528 > 0{\cdot}2760/2{\cdot}0528$$
$$> 0{\cdot}1344.$$

If $0{\cdot}25 \leqslant \beta \leqslant 0{\cdot}5$, we have

$$Q(1,-1) = \{1-\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,\Delta$$
$$> (1-0{\cdot}5132+0{\cdot}4436)^2/2{\cdot}0528 - (1-0{\cdot}25)^2\,.\,0{\cdot}5132$$
$$> 0{\cdot}9304^2/2{\cdot}0528 - 0{\cdot}75^2\,.\,0{\cdot}5132$$
$$> 0{\cdot}4216 - 0{\cdot}2887$$
$$= 0{\cdot}1329 > \xi$$

and

$$Q(1,-1) < (1-0{\cdot}4868+0{\cdot}5)^2/2 - 0{\cdot}125$$
$$= 1{\cdot}0132^2/2 - 0{\cdot}125 < 0{\cdot}5133 - 0{\cdot}125$$
$$= 0{\cdot}3883 < 1.$$

If $0{\cdot}1344 < \beta < 0{\cdot}25$, we have

$$Q(1,2) = \{1+(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta - {}^1/_{(2+\beta)^2\,\Delta}$$
$$> (1+0{\cdot}9736+0{\cdot}4436)^2/2{\cdot}0528 - 2{\cdot}25^2\,.\,0{\cdot}5132$$
$$= 2{\cdot}4172^2/2{\cdot}0528 - 2{\cdot}25^2\,.\,0{\cdot}5132$$
$$> 2{\cdot}8462 - 2{\cdot}5981$$
$$= 0{\cdot}2481 > \xi$$

and

$$Q(1,2) < (1+1{\cdot}0264+0{\cdot}5)^2/2 - 2{\cdot}1344^2\,.\,0{\cdot}5$$
$$= 2{\cdot}5264^2/2 - 2{\cdot}1344^2\,.\,0{\cdot}5 < 3{\cdot}1914 - 2{\cdot}2778$$
$$= 0{\cdot}9136 < 1.$$

This proves the result.

Case (*xi*).

$$1{\cdot}6 < \theta < 1{\cdot}6181 \text{ and } 0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264. \tag{46}$$

Proof. As above, we have

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \geqslant \alpha &> \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,\Delta > 0{\cdot}2218\,.\,2{\cdot}1 \\ &> 0{\cdot}4657 \end{aligned}$$

while

$$\begin{aligned} \beta &> \sqrt{(1-4\,\delta\Delta)}/\Delta > \sqrt{(1-0{\cdot}4500\,.\,2{\cdot}1445)}/2{\cdot}1445 \\ &> \sqrt{0{\cdot}0349}/2{\cdot}1445 > 0{\cdot}1868/2{\cdot}1445 \\ &> 0{\cdot}0871 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \beta &< \sqrt{(9-4\,\Delta)}/\Delta < \sqrt{0{\cdot}6}/2{\cdot}1 < 0{\cdot}7746/2{\cdot}1 \\ &< 0{\cdot}3689. \end{aligned}$$

If $0{\cdot}3 \leqslant \beta < 0{\cdot}3689$, we have

$$\begin{aligned} Q(1,-1) &= \{1-\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,\Delta \\ &> (1-0{\cdot}5591+0{\cdot}4657)^2/2{\cdot}1445 - (1-0{\cdot}3)^2\,.\,0{\cdot}5362 \\ &> 0{\cdot}9066^2/2{\cdot}1445 - 0{\cdot}7^2\,.\,0{\cdot}5362 \\ &> 0{\cdot}3832 - 0{\cdot}2628 \\ &= 0{\cdot}1204 > \xi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q(1,-1) &< (1-0{\cdot}5368+0{\cdot}5)^2/2{\cdot}1 - (1-0{\cdot}3689)^2\,.\,0{\cdot}525 \\ &= 0{\cdot}9632^2/2{\cdot}1 - 0{\cdot}6311^2\,.\,0{\cdot}525 \\ &< 0{\cdot}4418 - 0{\cdot}2090 \\ &= 0{\cdot}2328 < 1. \end{aligned}$$

If $0{\cdot}0871 < \beta < 0{\cdot}3$, we have

$$\begin{aligned} Q(1,2) &= \{1+(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(2+\beta)^2\,\Delta \\ &> (1+1{\cdot}0736+0{\cdot}4657)^2/2{\cdot}1445 - 2{\cdot}3^2\,.\,0{\cdot}5362 \\ &= 2{\cdot}5393^2/2{\cdot}1445 - 2{\cdot}3^2\,.\,0{\cdot}5362 \\ &> 3{\cdot}0067 - 2{\cdot}8365 \\ &= 0{\cdot}1702 > \xi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q(1,2) &< (1+1{\cdot}1181+0{\cdot}5)^2/2{\cdot}1 - 2{\cdot}0871^2\,.\,0{\cdot}525 \\ &= 2{\cdot}6181^2/2{\cdot}1 - 2{\cdot}0871^2\,.\,0{\cdot}525 \\ &< 3{\cdot}2641 - 2{\cdot}2868 \\ &= 0{\cdot}9773 < 1. \end{aligned}$$

This proves the result.

Case (xii).

$$1 < \theta < 1{\cdot}1112 \text{ and } 0{\cdot}7272 < \theta' < 0{\cdot}75. \tag{47}$$

Proof. As above, we have

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \geqslant \alpha &> \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,\Delta > 0{\cdot}2218\,.\,1{\cdot}7272 \\ &> 0{\cdot}3830 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \geqslant \beta &> \sqrt{(1-4\,\xi\Delta)/\Delta} > \sqrt{(1-0{\cdot}4500\,.\,1{\cdot}8612)/1{\cdot}8612} \\ &> \sqrt{0{\cdot}1624/1{\cdot}8612} > 0{\cdot}4029/1{\cdot}8612 \\ &> 0{\cdot}2164 \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} Q(1,-1) &= \{1-\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,\Delta \\ &> (1-0{\cdot}1920+0{\cdot}3830)^2/1{\cdot}8612 - (1-0{\cdot}2164)^2\,.\,0{\cdot}4653 \\ &= 1{\cdot}1910^2/1{\cdot}8612 - 0{\cdot}7836^2\,.\,0{\cdot}4653 \\ &> 0{\cdot}7621 - 0{\cdot}2858 \\ &= 0{\cdot}4763 > \xi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q(1,-1) &< (1-0{\cdot}125+0{\cdot}5)^2/1{\cdot}7272 - 1{\cdot}7272/16 \\ &= 1{\cdot}375^2/1{\cdot}7272 - 1{\cdot}7272/16 \\ &< 1{\cdot}0947 - 0{\cdot}1079 \\ &= 0{\cdot}9868 < 1. \end{aligned}$$

This proves the result.

Case (xiii).

$$1 < \theta < 1{\cdot}1112 \text{ and } 0{\cdot}625 < \theta' < 0{\cdot}6667. \tag{48}$$

Proof. As above, we have

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \geqslant \alpha &> \tfrac{1}{2}\,(1-\xi)\,\Delta > 0{\cdot}2218\,.\,1{\cdot}625 \\ &> 0{\cdot}3604 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \geqslant \beta &> \sqrt{(1-4\,\xi\Delta)/\Delta} > \sqrt{(1-0{\cdot}4500\,.\,1{\cdot}7779)/1{\cdot}7779} \\ &> \sqrt{0{\cdot}1999/1{\cdot}7779} > 0{\cdot}4471/1{\cdot}7779 \\ &> 0{\cdot}2514. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} Q(1,-1) &= \{1-\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta - \tfrac{1}{4}(1-\beta)^2\,\Delta \\ &> (1-0{\cdot}2431+0{\cdot}3604)^2/1{\cdot}7779 - (1-0{\cdot}2514)^2\,.\,0{\cdot}4445 \\ &= 1{\cdot}1173^2/1{\cdot}7779 - 0{\cdot}7486^2\,.\,0{\cdot}4445 \\ &> 0{\cdot}7021 - 0{\cdot}2492 \\ &= 0{\cdot}4529 > \xi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q(1,-1) &< (1-0{\cdot}1666+0{\cdot}5)^2/1{\cdot}625-1{\cdot}625/16 \\ &= 1{\cdot}3334^2/1{\cdot}625-1{\cdot}625/16 \\ &< 1{\cdot}0942-0{\cdot}1015 \\ &= 0{\cdot}9927<1. \end{aligned}$$

This proves the result.

Case (*xiv*).

$$\theta = 1{\cdot}6180,3\ldots \text{ and } \theta' = 0{\cdot}6180,3\ldots \tag{49}$$

Proof. As above, we have

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \geqslant \alpha &> \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,\Delta > 0{\cdot}2218\,.\,2{\cdot}2360 \\ &> 0{\cdot}4959. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 0 < \beta\sqrt{(9-4\,\Delta)/\Delta} &< \sqrt{0{\cdot}0560/2{\cdot}2360} < 0{\cdot}2366/2{\cdot}2360 \\ &< 0{\cdot}1059. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} Q(1,2) &= \{1+(\theta-\theta')+\alpha\}^2/\Delta-\tfrac{1}{4}(2+\beta)^2\,\Delta \\ &> (1+1+0{\cdot}4959)^2/2{\cdot}2361-2{\cdot}1059^2\,.\,0{\cdot}5591 \\ &> 2{\cdot}4959^2/2{\cdot}2361-2{\cdot}1059^2\,.\,0{\cdot}5591 \\ &> 2{\cdot}7858-2{\cdot}4797 \\ &= 0{\cdot}3061>\xi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q(1,2) &< 2{\cdot}5^2/2{\cdot}2360-2{\cdot}2360 \\ &< 2{\cdot}7952-2{\cdot}2360 \\ &= 0{\cdot}5592<1. \end{aligned}$$

This proves the result and completes the lemma.

8. *Proof of the Theorem* (*conclusion*).

We have now shown that $\xi < Q < 1$ is soluble in the following cases —

$$0 < a < 0{\cdot}5516, \text{ that is } 3{\cdot}6259 < \Delta \tag{35}$$

$$0{\cdot}6251 < a < 0{\cdot}8888, \text{ that is } 2{\cdot}25 < \Delta < 3{\cdot}1994 \tag{37}$$

$$0{\cdot}9799 < a < 1, \quad \text{that is } 2 < \Delta < 2{\cdot}0410 \tag{38}$$

$$1{\cdot}5466 < a < 2, \quad \text{that is } 1 < \Delta < 1{\cdot}2931 \tag{39}$$

$$0{\cdot}1834 < b < 0{\cdot}6465, \text{ that is } 3{\cdot}0936 < D < 10{\cdot}9051 \tag{40}$$

$$1{\cdot}125 < b < 1{\cdot}5999, \text{ that is } 1{\cdot}2501 < D < 1{\cdot}7777 \tag{41}$$

$$3{\cdot}125 < b < 3{\cdot}5752 \tag{42}$$

$$2{\cdot}01 < \theta < 2{\cdot}0286 \text{ and } 0{\cdot}01 < \theta' < 0{\cdot}0286 \tag{43}$$

$$1 < \theta < 1{\cdot}1112 \text{ and } 0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264 \tag{44}$$

$$1{\cdot}5 < \theta < 1{\cdot}5264 \text{ and } 0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264 \tag{45}$$

$$1{\cdot}6 < \theta < 1{\cdot}6181 \text{ and } 0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264 \tag{46}$$

$$1 < \theta < 1{\cdot}1112 \text{ and } 0{\cdot}7272 < \theta' < 0{\cdot}75 \tag{47}$$

$$1 < \theta < 1{\cdot}1112 \text{ and } 0{\cdot}625 < \theta' < 0{\cdot}6667 \tag{48}$$

$$\theta = 1{\cdot}6180, 3\ldots \text{ and } \theta' = 0{\cdot}6180, 3\ldots \tag{49}$$

Clearly, by (35) and (40), we need consider only the cases

$$g_{-n} = 1, 2 \text{ or } 3 \text{ and } g_{2n+1} = 1, 2, 3 \text{ or } \geqslant 9 \text{ for all } n.$$

Case (*i*). If $g_{2n+1} = 3$ for some n, we have

$$4 = [3, 1] > \varphi > [3, 3, 1] = 3{\cdot}25$$

while $0 < \varphi' < 1$ anyway so

$$3{\cdot}25 < D = \varphi + \varphi' < 5,$$

whence (24) by (40).

Hence $g_{2n+1} \neq 3$ so we now need consider only the cases

$$g_{2n} = 1, 2 \text{ or } 3 \text{ and } g_{2n+1} = 1, 2 \text{ or } \geqslant 9 \text{ for all } n.$$

Case (*ii*). If $g_{2n} = 3$ and $g_{2n+1} < 9$ for some n, we now have

$$\theta > [3, 2, 1] > 3{\cdot}3333$$

and, similarly,

$$\theta' > 0{\cdot}3333$$

so

$$\Delta = \theta + \theta' > 3{\cdot}6666,$$

whence (34) by (35).

If $g_{2n} = 3$ and $g_{2n-1} = 9$ for some n, we have

$$9 < \varphi < [9, 3] < 9{\cdot}3334$$

while $0 < \varphi' < 1$ anyway so

$$9 < D < 10{\cdot}3334,$$

whence (34) by (40).

If $g_{2n} = 3$, $g_{2n-1} > 9$ and $g_{n+1} < 9$ for some n, we have

$$\theta > [3, 2, 1] > 3{\cdot}3333$$

and

$$\theta < [3, 1, 3, 1] = 19/5 = 3{\cdot}8$$

while $0 < \theta' < [0, 10] = 0{\cdot}1$.

Now

$$-2\,Q(-1,1) = \frac{2(\theta-1)(1+\theta')}{\theta+\theta'} > \frac{2\,.\,2{\cdot}3333.1}{3{\cdot}3333}$$

$$= 1{\cdot}4$$

and

$$-2\,Q(-1,1) < \frac{2\,.\,2{\cdot}8\,.\,1{\cdot}1}{3{\cdot}9}$$

$$< 1{\cdot}5795,$$

whence (34) by (41) since we may put $-2\,Q(-1,1) = b$ in (33).

If $g_{2n} = 3$ and $g_{2n\pm1} \geqslant 10$ for some n, we have

$$3 < \theta < [3, 10, 3, 1] = 127/41 < 3{\cdot}0976$$

and, similarly, $0 < \theta' < 0{\cdot}0976$

so

$$3 < \Delta < 3{\cdot}1952,$$

whence (34) by (37).

Since $\{g_n\}$ is reversible this excludes all possibilities. Hence $g_{2n} \neq 3$ so we now need consider only the cases

$$g_{2n} = 1 \text{ or } 2 \text{ and } g_{2n+1} = 1, 2 \text{ or } \geqslant 9 \text{ for all } n.$$

Case (*iii*). If $g_{2n+1} = 2$ and $g_{2n} = g_{2n+2} = 1$ for some n, we have

$$3 = [2, 1] > \varphi > [2, 1, 1, 2, 1] = 18/7 = 2{\cdot}5714$$

and, similarly,

$$0{\cdot}5714 < \varphi' < 1$$

so

$$3{\cdot}1428 < D < 4,$$

whence (34) by (40).

If $g_{2n} = g_{2n+1} = 2$ for some n, we have

$$\theta > [2, 2, 1] = 7/3 > 2{\cdot}3333$$

and

$$\theta < [2, 2, 2, 1] = 17/7 < 2{\cdot}4286$$

while

$$0 < \theta' < [0, 1, 2, 1] = 3/4 = 0{\cdot}75$$

so

$$2{\cdot}3333 < \Delta < 3{\cdot}1786,$$

whence (34) by (37).

Hence, since $\{g_n\}$ is reversible, $g_{2n+1} \neq 2$ so we now need consider only the cases

$$g_{2n} = 1 \text{ or } 2 \text{ and } g_{2n+1} = 1 \text{ or } \geqslant 9 \text{ for all } n.$$

Case (iv). If $g_{2n} = 2$, $g_{2n-1} = 1$ and $g_{-n+1} \geqslant 9$ for some n, we have

$$2 < \theta < [2, 9] < 2{\cdot}1112$$

while

$$1 > \theta' > [0, 1, 1] = 0{\cdot}5$$

so

$$2{\cdot}5 < \Delta < 3{\cdot}1112,$$

whence (34) by (37).

If $g_n = 2$, $g_{2n-1} \geqslant 9$ and $9 \leqslant g_{2n+1} \leqslant 35$ for some n, we have

$$9 < \varphi < 35$$

while

$$\varphi' < [0, 2] = 0{\cdot}5$$

and

$$\varphi' > [0, 2, 9] = 9/19 > 0{\cdot}4736$$

so

$$-2\,Q(2, 1) = \frac{2(2+\varphi)(2-\varphi')}{\varphi+\varphi'} > \frac{2\,.\,37\,.\,1{\cdot}5}{35{\cdot}5}$$

$$> 3{\cdot}1267$$

and

$$-2\,Q(2, 1) < \frac{2\,.\,11\,.\,1{\cdot}5264}{9{\cdot}4736}$$

$$< 3{\cdot}5447,$$

whence (34) by (42) since we may put $-2\,Q(2, 1) = b$ in (33).

If $g_{2n} = 2$ and $35 \leqslant g_{2n+1} \leqslant 99$ for some n, we have

$$\theta < [2, 99, 1] = 2{\cdot}01$$

and

$$\theta < [2, 35] < 2{\cdot}0286$$

and, similarly,

$$0{\cdot}01 < \theta' < 0{\cdot}0286,$$

whence (34) by (43).

If $g_{2n-1} \geqslant 35$ and $g_{2n+1} \geqslant 99$ for some n, we have

$$2 < \theta < [2, 99] < 2{\cdot}0102$$

while

$$0 < \theta' < [0, 35] < 0{\cdot}0286$$

so

$$2 < \Delta < 2{\cdot}0388,$$

whence (34) by (38).

Hence, since $\{g_n\}$ is reversible, if $g_{2n} = 2$ for some n, $g_{2n\pm1} = 1$.

Case (*v*). If $g_{2n} = g_{2n\pm2} = 2$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots)$$

so

$$\varphi = [1, 2, 1, 2, 1, \ldots] > [1, 2, 1] = 4/3 > 1{\cdot}3333$$

and

$$\varphi < [1, 2, 1, 2] = 11/8 = 1{\cdot}375$$

while

$$\varphi' = [0, 2, 1, \ldots] > [0, 2, 1] = 1/3 > 0{\cdot}3333$$

and

$$\varphi' < [0, 2, 1, 1] = 2/5 = 0{\cdot}4$$

so

$$1{\cdot}6666 < D < 1{\cdot}775,$$

whence (34) by (41).

Hence no three consecutive even g's are 2's.

Case (*vi*). If $g_{2n} = g_{2n-2} = 2$ and $g_{2n+3} = g_{2n-5} = 1$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, \ldots),$$

so

$$\varphi = [1, 2, 1, 1, 1, \ldots] > [1, 2, 1, 1, 1] = 11/8 = 1{\cdot}375$$

and

$$\varphi < [1, 2, 1, 1, 1, 1] = 18/13 < 1{\cdot}3847$$

and, similarly, $0{\cdot}375 < \varphi < 0{\cdot}3847$

so

$$1{\cdot}75 < D < 1{\cdot}7694,$$

whence (34) by (41).

If $g_{-n} = g_{2n-2} = 2$ and $g_{2n+3} \geqslant 9$ for some n, we have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, \geqslant 9, \ldots)$$

so

$$1 < \theta < [1, 9] < 1{\cdot}1112$$

while

$$\theta' = [0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, \ldots] > [0, 1, 2, 1, 2] = 8/11 > 0{\cdot}7272$$

and

$$\theta' < [0, 1, 2, 1] = 3/4 = 0{\cdot}75,$$

whence (34) by (47).

Hence, since $\{g_n\}$ is reversible, if $g_{2n} = 2$ for some n, $g_{2n\pm1} = g_{2n\pm2} = 1$.

Case (*vii*). If $g_{2n} = 2$ and $g_{2n+3} \geqslant 9$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 1, 2, 1, 1, \geqslant 9, \ldots)$$

so

$$\theta = [2, 1, 1, \geqslant 9, \ldots] > [2, 1, 1] = 2{\cdot}5$$

and

$$\theta < [2, 1, 1, 9] = 48/19 < 2{\cdot}5264$$

while

$$\theta' = [0, 1, 1, \ldots] > [0, 1, 1] = 0{\cdot}5$$

and

$$\theta' < [0, 1, 1, 1] = 2/3 < 0{\cdot}6667$$

so

$$3 < \Delta < 3{\cdot}1931,$$

whence (34) by (37).

Hence, since $\{g_n\}$ is reversible, if $g_{2n} = 2$ for some n, $g_{2n\pm1} = g_{2n\pm2} = g_{2n\pm3} = 1$.

Case (*viii*). If $g_{2n} = g_{2n-4} = 2$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, \ldots)$$

so

$$\theta = [1, 1, 2, 1, 1, 1, \ldots] > [1, 1, 2] = 5/3 > 1{\cdot}6666$$

and

$$\theta < [1, 1] = 2$$

and, similarly,

$$0{\cdot}6666 < \theta' < 1$$

so

$$2{\cdot}3332 < \Delta < 3,$$

whence (34) by (37).

Hence, since $\{g_n\}$ is reversible, if $g_{2n} = 2$ for some n, $g_{2n\pm1} = g_{2n\pm2} = g_{2n\pm3} = g_{2n\pm4} = 1$.

Case (*ix*). If $g_{2n} = 2$ and $g_{2n-5} = 1$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, \ldots)$$

so

$$\theta = [1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, \ldots] > [1, 1, 2] = 5/3 > 1{\cdot}6666$$

and

$$\theta < [1, 1] = 2$$

while

$$1 > \theta' = [0, 1, 1, 1, \ldots] > [0, 1, 1, 1, 1] = 3/5 = 0{\cdot}6$$

so

$$2{\cdot}2666 < \Delta < 3,$$

whence (34) by (37).

If $g_{2n} = 2$ and $g_{2n+5} \geqslant 9$ for some n, we have

$$\{g_n\} = (\ldots 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, \geqslant 9, \ldots)$$

so

$$1 < \theta = [1, \geqslant 9, \ldots] < [1, 9] < 1{\cdot}1112$$

while

$$\theta' = [0, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, \ldots] < [0, 1, 1, 1] = 2/3 < 0{\cdot}6667$$

and

$$\theta' > [0, 1, 1, 1, 2] = 5/8 = 0{\cdot}625,$$

whence (34) by (48).

Hence, since $\{g_n\}$ is reversible, $g_{2n} = 1$ for all n so we now need consider only the cases

$$g_{2n} = 1 \text{ and } g_{2n+1} = 1 \text{ or } \geqslant 9 \text{ for all } n.$$

Case (*x*). If $g_{2n\pm1} \geqslant 9$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = [\ldots \geqslant 9, 1 \geqslant 9, \ldots]$$

so

$$1 < \theta = [1, \geqslant 9, \ldots] < [1, 9] < 1{\cdot}1112$$

and, similarly,

$$0 < \theta' < 0{\cdot}1112$$

so

$$1 < \Delta < 1{\cdot}2224$$

whence (34) by (39).

Hence if $g_{2n+1} \geqslant 9$ for some n, $g_{2n-1} = g_{2n+3} = 1$.

Case (*xi*). If $g_{2n+1} \geqslant 9$ and $g_{2n-3} \geqslant 9$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = [\ldots \geqslant 9, 1, 1, 1 \geqslant 9, \ldots]$$

so

$$1 < \theta = [1, \geqslant 9, \ldots] < [1, 9] < 1{\cdot}1112$$

while

$$\theta' = [0, 1, 1, \geqslant 9, \ldots] > [0, 1, 1] = 0{\cdot}5$$

and

$$\theta' < [0, 1, 1, 9] = 10/19 < 0{\cdot}5264,$$

whence (34) by (44).

Hence if $g_{2n+1} \geqslant 9$ for some n, $g_{2n-1} = g_{2n\pm3} = g_{2n+5} = 1$.

Case (*xii*). If $g_{2n\pm3} \geqslant 9$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = [\ldots \geqslant 9, 1, 1, 1, 1, 1, \geqslant 9, \ldots]$$

so

$$\theta = [1, 1, 1, \geqslant 9, \ldots] > [1, 1, 1] = 1{\cdot}5$$

and

$$\theta < [1, 1, 1, 9] = 29/19 < 1{\cdot}5264$$

and, similarly,

$$0{\cdot}5 < \theta' < 0{\cdot}5264,$$

whence (34) by (45).

Case (*xiii*). If $g_{2n+1} \geqslant 9$ for some n, we now have

$$\{g_n\} = (\ldots \geqslant 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$$

so

$$\theta = [1, 1, 1, 1, 1, \ldots] > [1, 1, 1, 1, 1] = 8/5 = 1{\cdot}5$$

and

$$\theta < [\dot{1}] = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) < 1{\cdot}6181$$

while

$$\theta' = [0, 1, 1, \geqslant 9, \ldots] < [0, 1, 1] = 0{\cdot}5$$

and

$$\theta' < [0, 1, 1, 9] = 10/19 < 0{\cdot}5264,$$

whence (34) by (46).

Hence $g_n = 1$ for all n.

Case (*xiv*). We now have

$$\theta = [\dot{1}] = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1{\cdot}6180, 3\ldots$$

and

$$\theta = [0, \dot{1}] = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{\cdot}6180, 3\ldots,$$

whence (34) by (49).

This completes the proof of the Theorem.

References

(1) *Blaney, H.* Indefinite quadratic forms in n variables. J. London Math. Soc. 23 (1948), 153—160.

(2) *Blaney, H.* Some Asymmetric Inequalities. Proc. Cambridge Phil. Soc. 46 (1950), 359—376.

(3) *Blaney, H.* University of London Ph. D. Thesis (1949).

(4) *Davenport, H.* and *Heilbronn, H.* Asymmetric Inequalities for non-homogeneous linear forms. J. London Math. Soc. 22 (1947), 53—61.

(5) *Dickson, L. E.* Introduction to the Theory of Numbers, University of Chicago (1929), Chapter VII.

(6) *Fatou, P.* Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci. Paris 139 (1904), 1019—1021.

(7) *Hardy, G. H.* and *Wright, E. M.* Introduction to the Theory of Numbers, Third Edition (O. U. P. 1954), Chapter XXIV.

(8) *Robinson, R. M.* The approximation of irrational numbers by fractions with odd or even terms. Duke Math. J. 7 (1940), 354—359.

(9) *Segre, B.* Lattice points in infinite domains and asymmetric diophantine approximations. Duke Math. J. **12** (1945), 337—365.

Über die homomorphen Bilder des Ringes der ganzen Zahlen und über eine verwandte Ringfamilie[1]

Von

F. A. Szász, Debrecen (Ungarn)

(Eingegangen am 25. Juni 1956)

Wir behandeln in dieser Note zwei spezielle ringtheoretische Probleme. Professor *L. Rédei* hat in dem Artikel [7] alle Ringe (die sog. „Vollidealringe") bestimmt, deren sämtliche additive Untergruppen zweiseitige Ideale im Ringe sind. Wir haben in einer Note [10] alle Ringe gekennzeichnet, deren sämtliche Unterringe die Form $n\,R$ haben, wo R der besprochene Ring und n eine geeignete ganze Zahl ist.

Ein Ring R wird Ring mit der Eigenschaft E_1 genannt, wenn sämtliche Unterringe in der Gestalt $R\,r$ darstellbar sind ($r \in R$).

Ein Ring R wird Ring mit der Eigenschaft E_2 genannt, wenn sämtliche echte additive Untergruppen von endlich vielen Erzeugenden in der Gestalt $R\,r$ darstellbar sind ($r \in R$).

Der Ring J der ganzen Zahlen hat sowohl die Eigenschaft E_1 als auch die Eigenschaft E_2. In einem Ringe mit der Eigenschaft E_2 deckt sich die gruppentheoretische Erzeugung mit der ringtheoretischen Erzeugung, da sämtliche Untergruppen gleichzeitig Linksideale sind. Die kommutativen Ringe mit der Eigenschaft E_1 sind (nach der Terminologie von *L. Rédei*) „Vollidealringe im weiteren Sinn" (d. h. sämtliche Unterringe erweisen sich als zweiseitige Ideale) [8]. Es gibt auch nicht kommutative Ringe mit der Eigenschaft E_2. Z. B. $R(p)=\{x, y\}$, p Primzahl, $p\,x = p\,y = y\,x - x = y^2 - y = 0$, wo der Unterring $\{M\}$ von der Teilmenge M von R erzeugt ist. Man wird hingegen sehen, daß nur ein kommutativer Ring die Eigenschaft E_1 haben kann. Die Grundbegriffe der modernen Algebra sind z. B. in den Büchern [1], [4], [5] und [6] zu finden, daher machen wir keine terminologische Bemerkung, aber man soll betonen, daß ein zyklischer Ring (d. h. Ring mit

[1] Dem Andenken meines verehrten Meisters *T. Szele*.

zyklischer additiver Gruppe) immer in der Gestalt $R(m, d) = \{a\}$ darstellbar ist, wo $O(a) = m$ und $a^2 = d \cdot a$, $d \mid m$. Die Elemente $f_1, f_2, \ldots$ werden linearunabhängig genannt, wenn aus $\sum_j n_j f_j = 0$ immer $n_j f_j = 0$ folgt (n_j eine Zahl, und die Summe „endlich"). Nach dem Lemma von Zorn gibt es in R^+ eine maximale linearunabhängige Menge M der Elemente von R^+ und (während zu der Menge M nur Elemente von 0- und Primzahlpotenz-Ordnung) wird die Mannigfaltigkeit von M (der s. g. Rang) invariant für R^+. Wir bezeichnen den Primkörper von der Ordnung p mit K_p und die ringtheoretische direkte Summe mit $R = \sum_\alpha S_\alpha$.

Es gilt der folgende

Satz 1. Ein beliebiger Ring R hat die Eigenschaft E_1 dann und nur dann, wenn $R \simeq J/(m)$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Beweis. Es ist hinreichend zu zeigen, daß ein Ring mit der Eigenschaft E_1 das homomorphe Bild von J ist. Nach der Eigenschaft E_1 ist klar, daß $S = Rr \subseteq R\{r\} \subseteq \{r\}$ gilt, dementsprechend im Falle $R = R.a$ offenbar folgt $R = \{a\}$. Aber $R = R.a$ bedeutet die Existenz eines Elements $b \neq 0$ mit $a = ba$, und so wird das Linksideal $L = \{b\}a$ zyklisch.

Es gilt $R = \{a\} = \{ba\} \subseteq \{b\}a = L$, also ist R selbst zyklisch und $R(m, d) = \{a\}$. Wenn $m = 0$ (d. h. $O(a) = 0$), ist $R = R(la)$ und deswegen $a = ka \cdot la$, wo $k, l \in J$. So gilt nach $a^2 = da$ offenbar $1 = kl \cdot d$ und $d \mid 1$, also $R \simeq J$. Aber im Falle $m > 0$ und $d \mid m$ besteht gleichfalls $1 \equiv kld \pmod m$ und hieraus $1 \equiv 0 \pmod d$, d. h. $d = 1$ und $R \simeq T/(m)$, womit der Satz 1 bewiesen ist.

Bemerkung. Die Ringe $K_2 + K_2$, $R(p)$, $R(p, 0)$ und $R(p^m, p)$ haben nicht die Eigenschaft E_1, aber alle ihre *echten* Unterringe S sind in der Gestalt Rr darstellbar. Man durchschaut nicht sehr schwer das Problem; zu charakterisieren alle Ringe, deren sämtliche *echten* Unterringe von der Form Rr sind. Diesmal geben wir nur die Aufzählung der Ringe mit der Eigenschaft E_2.

Satz 2. Ein beliebiger Ring R hat die Eigenschaft E_2 dann und nur dann, wenn er ein Ring von dem Type $R(0, 1)$, $R(p, 0)$, $R(m, 1)$, $R(p^m, p)$, $R(p)$, $K_2 + K_2$ oder $R = \sum_{p \in \Pi} R(p^k, 1)$ ist, wo Π^* eine wenigstens zwei Primzahlen enthaltende Untermenge von der Menge Π aller verschiedenen Primzahlen ist.

Folgerung. *Ein beliebiger Ring R hat die Eigenschaft E_2^* (d. h. daß sämtliche echte Untergruppen in der Gestalt Rr darstellbar sind*

($r \in K$)) dann und nur dan, wenn er von dem Type $R(0, 1)$, $R(p, 0)$, $R(m, 1)$, $R(p^n, p)$, $R(p)$ oder $K_2 + K_2$ ist.

Die Rechtfertigung dieser Folgerung ist nach dem Satz 2 trivial.

Beweis: Es sei R ein Ring mit der Eigenschaft E_2. Nehmen wir an, daß R^+ eine torsionsfreie Gruppe ist. Wenn R^+ nicht von dem Rang 1 wäre, sondern a und b sich linearunabhängig erweisen, dann wäre $R = \{a, b\} = \{2a, b\}$, was unmöglich ist. (Wegen $S = Rr \subseteq R\{r\} \subseteq \{r\}$ ist jede echte additive Untergruppe von endlich vielen Erzeugenden ein zyklisches Linksideal von R. Ähnlich kann man zeigen, daß R^+ nicht eine gemischte Gruppe ist.) Folglich ist R^+ eine Untergruppe der Gruppe der rationalen Zahlen. R ist kein Zeroring, also R hat keinen Nullteiler. Es sei $\{e\} = Rr \neq 0$, dann ist wegen $R^+ \simeq (Rr)^+$ auch R zyklisch, d. h. $R = \{e\} = R(0, d)$. Nun enthält $(d + 1)R = R(le)$ die Existenz der Zahl $k \in J$, für welche $(d + 1)e = (ke)(le) = kldе$, d. h. $d \mid 1$ und $R \simeq R(0, 1) \simeq J$.

Es sei nun R ein p-Ring. Wenn R den Rang 1 hat, dann ist R^+ zyklisch, weil er offenbar nicht algebraisch abgeschlossen sein kann [2]. Es ist trivial, daß $R \simeq R(p, 0)$, $R(p^k, 1)$ oder $R \simeq R(p^k, p)$. Wenn aber R^+ nicht von dem Rang 1 ist, soll offenbar $O(R) = p^2$ sein. Nehmen wir an, daß für jedes Element $x \neq 0$ auch $x^2 \neq 0$ besteht. In der Dekomposition $R^+ = \{x\}^+ - \{y\}^+$ kann man x und y so wählen, daß $x^2 = x$ und $y^2 = y$ besteht. Wir zeigen jetzt die Kommutativität von R. Wenn nämlich $xy = ay \neq yx = bx$ wäre ($a, b \in J$), dann ist a oder b durch p nicht teilbar. Aber $bx = x(bx) = xyx = (ay)x = abx$ und $ay = y(ay) = yxy = (bx)y = aby$ zeigt, daß $ab \equiv a \equiv b \pmod p$ und $p \nmid a$, $p \nmid b$, d. h. $a \equiv b \equiv 1 \pmod p$ und $xy = y$; $yx = x$. Wegen $\{x\} \cap \{y\} = \{0\}$ ist offenbar $z = x - y \neq 0$, wobei $z^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x - y - x + y = 0$ besteht, was ein Widerspruch ist. Folglich ist R kommutativ. Wegen $(x + 2y)^2 \in \{x + 2y\}$ gilt $p = 2$ und $R \simeq K_2 + K_2$, wo K_p ein Primkörper ist. Nehmen wir an, daß ein Element $x \neq 0$ mit $x^2 = 0$ existiert. Wir zeigen, daß $R \simeq R(p)$. Wenn $R^+ = \{x\}^+ + \{y\}^+$ und $xy = ay$, $yx = bx$, $y^2 \in \{y\}$, $a, b \in J$ besteht $0 = x^2 y = x(ay) = a^2 y$, d. h. $p \mid a$ und $xy = 0$. Wäre $yx = 0$, so sollte $y^2 \neq 0$ sein (da R kein Zeroring ist), folglich wäre bei geeignetem Wählen von y notwendig $y^2 = y$, d. h. mit einem $xc + dy \in R$ und mit $mx + ny \in R$ ($c, d, m, n \in J$) $\{x\} = R(cx + dy)$ und dementsprechend wäre $x = (mx + ny) \cdot (cx + dy) = ndy^2 = ndy \in \{y\}$ was ein Widerspruch ist. Also ist $yx = bx$ mit $p \nmid b$. Nehmen wir an,

daß $y^2 = y$, so besteht $y^2 x = y(b\,x) = b^2 x \neq 0$ und $y^2 \neq 0$. Aber wegen $y^2 x = y\,x$ folgt $b \equiv 1 \pmod{p}$, d. h. $y\,x = x$ und $R \simeq R(p)$.

Wenn aber R kein p-Ring ist, hat jede p-Kompomemte R_p, als ein endomorphes Bild von R (im ringtheoretischen Sinn), die Eigenschaft E_2. Dann ist höchstens $R_p = R(p)$, $R(p, 0)$, $R(p^k, p)$ oder $R(p^k, 1)$. $R(p)$ sollte ein zyklischer Unterring von R sein ($R(p) \subset R$), was unmöglich ist, d. h. $R_p \neq R(p)$. Wegen Definition der Eigenschaft E_2 besteht notwendig auch $R_p \neq R(p, 0)$. Wir zeigen nun, daß $R_p \neq R(p^k, p)$. Wenn $R_{p_1} = R(p_1^{p_1}, p_1) = \{a_1\} \subset R$ wäre, dann bekämen wir für $R = \sum\limits_{p_\nu \varepsilon \Pi^*} \{a_\nu\}$ (Π^* eine wenigstens zwei Primzahlen erhaltende Teilmenge der Menge Π aller Primzahlen) notwendig:

$$S = \{a_1\} + \sum_{p_1 \neq p_\nu \varepsilon \Pi^{**}} \{p_\nu\, a_\nu\} = R\,r$$

wo Π^{**} eine endliche Teilmenge von Π^*.

Nehmen wir an, daß $r = m(a_1 + \sum\limits_{p_1 \neq p_\nu \varepsilon \Pi^{**}} a_\nu)$ mit $m \in J$. Es sei $a_\nu^2 = \delta_\nu\, a_\nu$ und $\delta_\nu \mid p_\nu$. Dann existierte eine Zahl $n \in J$, für welche

$$a_1 + \sum_{p_1 \neq p_\nu \varepsilon \Pi^{**}} p_\nu\, a_\nu = m\,n(p_1\, a_1 + \sum_{p_1 \neq p_\nu \varepsilon \Pi^{**}} \delta_\nu\, a_\nu)$$

bestände, d. h. $m\,n\,p_1 \equiv 1 \pmod{p_1^{k_1}}$ und $p_1 \mid 1$, was unmöglich ist. Folglich ist $R = \sum\limits_{p \varepsilon \Pi^*} R(p^k, 1)$. Der andere Teil des Beweises des Satzes 2 ist trivial, womit der Satz bewiesen ist.

Literatur

[1] *N. Jacobson*: Lectures in abstract algebra, *New- York* (1951).

[2] *A. Kertész*: On fully decomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **3** (1952) 225—232.

[3] *A. Kertész* and *T. Szele*: Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphie image *Acta. Sci. Math. Szeged* **15** (1953) 70—76.

[4] *A. G. Kurosch*: Gruppentheorie, 2-te Edition, *Moskau* (1953).

[5] *G. Pickert*: Einführung in die höhere Algebra, *Göttingen* (1951).

[6] *L. Rédei*: Algebra I., *Budapest* (1954).

[7] *L. Rédei*: Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math. Wien.* **56** (1952), 89—95.

[8] *L. Rédei:* Die Vollidealringe im weiteren Sinn, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **3** (1952), 243—268.

[9] *F. Szász*: On groups every subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **6** (1955) 475—477.

[10] *F. Szász*: On rings every subring of which is a multiple of the ring, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956) 237—238.

Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 18. Juli 1956)

1. Einleitung

In [3] bewies *Frucht* den folgenden Satz:

Satz 1: *Sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe mit der Ordnung $h \geqq 3$, die von n ihrer Elemente erzeugt werden kann, dann ist es stets möglich, einen kubischen Graphen mit $2(n+2)\,h$ Punkten zu finden, dessen Automorphismengruppe einfach isomorph zu $\mathfrak{H}$ ist.*

Die Graphen, die *Frucht* zum Beweise dieses Satzes angibt, haben zusätzlich folgende Eigenschaften: sie sind

(*i*) zusammenhängend,

(*ii*) kovariant, d. h. es gibt zu jedem Punkt des Graphen ein Element seiner Gruppe, das diesen Punkt in einen anderen überführt,

(*iii*) ohne Fixkante, d. h. es gibt zu jeder Kante des Graphen ein Element seiner Gruppe, das diese Kante in eine andere überführt.

G. Sabidussi [5] begann diesen Satz zu verallgemeinern. Wir werden in der vorliegenden Arbeit folgende Sätze beweisen:

Satz 2: *Es gibt keinen regulären Graphen X mit dem Zusammenhang $c(X) = 1$ und der Farbenzahl $\chi(X) = 2$.*

Satz 3: *Sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe und seien n, χ, c drei natürliche Zahlen, $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$, $[\chi, c] \neq [2, 1]$, dann gibt es unendlich viele nicht-isomorphe Graphen X_i, $i = 1, 2, \ldots$, die regulär n-ten Grades sind, deren Farbenzahl $\chi(X_i) = \chi$, deren Zusammenhang $c(X_i) = c$ und deren Automorphismengruppe $G(X_i) \simeq \mathfrak{H}$ ist. Sie sind kovariant und besitzen keine Fixkante, falls die Gruppe mindestens zwei Elemente besitzt.*

Beweis zu Satz 2. Angenommen es gibt einen regulären Graphen X n-ten Grades mit $c(X) = 1$, $\chi(X) = 2$. Er besteht aus p_r „roten" und

p_b „blauen" Punkten, wobei jeder Punkt n „rote" oder „blaue Enden" besitzt. Eine Kante ist die Verbindung eines roten und eines blauen Endes. $p_r = p_b$. Es gibt einen Punkt P von X, bei dessen Entfernung der Graph X in mindestens zwei Teile $X_1, X_2, \ldots$ zerfällt. Angenommen P wäre rot. Dann gibt es einen regulären Untergraphen X_1, von X n-ten Grades „mit m freien blauen Enden", $1 \leqq m < n$. Er enthält $p_{1,r}$ rote und $p_{1,b}$ blaue Punkte und daher $np_{1,r}$ rote und $np_{1,b}$ blaue Enden; und weil jede Kante aus einem roten und aus einem blauen Ende besteht, muß die Anzahl der verbleibenden freien blauen Enden $m \equiv 0(n)$ sein. Widerspruch zu $1 \leqq m < n$.

2. Graphen, die für den Beweis zu Satz 3 benötigt werden

Die Methode, die Gruppen dieser Graphen zu finden, ist die gleiche, wie sie in [3] verwendet wurde. Die Farbenzahlen sind evident.

Graph B_1. $B_1 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_3], [P^{(2)}, I_{31}], [Q^{(2)}, I_{32}], [P^{(3)}, I_{30}], [Q^{(3)}, I_{28}], [I_{12}, I_{31}], [I_{13}, I_{31}], [I_{10}, I_{32}], [I_{15}, I_{32}]\} \cup (\bigcup_{i=1}^{11} + \bigcup_{i=13}^{29}) [I_i, I_{i+1}] \cup \cup (\bigcup_{i=0}^{2} + \bigcup_{i=4}^{8}) [I_{3i+1}, I_{3i+6}] \cup \bigcup_{i=0}^{4} [I_{6i+2}, I_{6i+5}]$, $\chi(B_1) = 2$, $G(B_1) = \{E, S\}$. Dabei ist E das Einheitselement und S eine Spiegelung des Graphen an einer Längsachse, wobei $P^{(i)} S = Q^{(i)}$ und $Q^{(i)} S = P^{(i)}$ ist.

Graph B_2. $B_2 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_2], [I_4, I_5]\} \cup \bigcup_{i=1}^{6} [I_{2i-1}, I_{2i}] \cup \cup \bigcup_{i=2}^{8} [I_i, I_{i+4}] \cup \bigcup_{i=1,9,10} [I_i, I_{i+2}]$, $\chi(B_2) = 2$, $G(B_2) = \{E, S\}$.

Graph B_3. $B_3 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_3], [P^{(2)}, I_8], [Q^{(2)}, I_4], [I_2, I_6], [I_5, I_7], [I_1, I_8]\} \cup \bigcup_{i=1}^{7} [I_i, I_{i+1}]$, $\chi(B_3) = 3$, $G(B_3) = \{E, S\}$.

Graph B_4. $B_4 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_1], [I_3, I_5], [I_6, I_8], [I_7, I_{10}], [I_2, I_{10}], [I_4, I_9]\} \cup \bigcup_{i=1}^{9} [I_i, I_{i+1}]$, $\chi(B_4) = 3$, $G(B_4) = \{E, (P^{(1)}, Q^{(1)})\}$.

Graph B_5. $B_5 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_{18}], [I_5, I_{14}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{17} [I_i, I_{i+1}] \cup \cup \bigcup_{i=1,4,13,16} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=1,7,8,9,15} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[I_{3+9i}, I_{7+9i}], [I_{2+9i}, I_{8+9i}], [I_{2+8i}, I_{9+8i}], [I_{5+i}, I_{13+i}]\}$, $\chi(B_5) = 4$, $G(B_5) = \{E, S\}$.

Graph B_6. $B_6 = \{[P^{(1)}, I_1], [P^{(2)}, I_{15}], [I_1, I_{15}], [I_2, I_6], [I_3, I_{13}], [I_5, I_{11}], [I_8, I_{14}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{14} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i \varepsilon M} [I_i, I_{i+2}]$, $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13\}$, $\chi(B_6) = 4$, $G(B_6) = \{E\}$.

Graph B_7. $B_7 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_{19}], [P^{(2)}, I_7], [Q^{(2)}, I_{13}], [I_1, I_{18}], [I_6, I_{15}], [I_9\ I_{18}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{18} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i \in M} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=3,11,12,14} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=2,3,6,10} [I_i, I_{i+7}]$, $M = \{1, 2, 4, 5, 11, 12, 16\}$, $\chi(B_7)=2$, $G(B_7)=\{E, S\}$.

Graph B_8. $B_8 = B_7 - \{[I_4, I_7], [I_{13}, I_{14}]\} \cup \{[P^{(2)}, I_7], [Q^{(2)}, I_{13}]\} \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[I_{4+10i}, I_{26+6i}], [I_{31+10i}, I_{38-i}], \bigcup_{k=26}^{28}([I_{k+6i}, I_{38+3i}], [I_{k+6i+2}, I_{39+3i}], [I_{k+6i+3}, I_{40+3i}]), \bigcup_{k=0}^{1} ([I_{20+5k}, I_{7+24k+6i}], [I_{26+i+6k}, I_{39+i+3k}], \bigcup_{l=20}^{24} [I_{l+k}, I_{l+7+6i-k}])\}$, $\chi(B_8) = 2$, $G(B_8) = \{E, S\}$.

Graph B_9. $B_9 = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_{22}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{21} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=3}^{7} [I_{2i}, I_{2i+3}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \bigcup_{k=0}^{1} [I_{1+2i+16k}, I_{4+2i+16k}] \cup (\bigcup_{i=1}^{2} + \bigcup_{i=4}^{5} + \bigcup_{i=7}^{9}) [I_i, I_{23-i}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[I_{10i+3}, I_{10i+10}], [I_{10i+2}, I_{10i+11}], [I_{2i+5}, I_{2i+16}]\}$, $\chi(B_9) = 2$, $G(B_9) = \{E, S\}$.

Graph B_{10}. $B_{10} = \{[P^{(1)}, I_8], [Q^{(1)}, I_2], [P^{(2)}, I_9], [Q^{(2)}, I_1], [I_1, I_9]\} \cup \bigcup_{i=1}^{8} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1}^{7} [I_i, I_{i+2}]$, $\chi(B_{10}) = 3$, $G(B_{10}) = \{E, S\}$.

Graph B_{11}. $B_{11} = \{[P^{(1)}, I_2], [Q^{(1)}, I_{10}], [P^{(2)}, I_3], [Q^{(2)}, I_9], [I_1, I_4], [I_1, I_8], [I_1, I_{10}], [I_2, I_{10}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{9} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=3}^{7} [I_i, I_{i+2}]$, $\chi(B_{11}) = 3$, $G(B_{11}) = \{E, S\}$.

Graph B_{12}. $B_{12} = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_1], [I_1, I_9], [I_2, I_8], [I_3, I_9], [I_4, I_8], [I_5, I_7]\} \cup \bigcup_{i=1}^{8} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=2,3,4,6} [I_i, I_{i+3}]$, $\chi(B_{12}) = 3$, $G(B_{12}) = \{E, (P^{(1)}, Q^{(1)})\}$.

Graph B_{13}. $B_{13} = \{[P^{(1)}, I_6], [Q^{(1)}, I_2], [P^{(2)}, I_7], [Q^{(2)}, I_1], [I_1, I_7]\} \cup \bigcup_{i=1}^{6} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1}^{5} [I_i, I_{i+2}]$, $\chi(B_{13}) = 4$, $G(B_{13}) = \{E, S\}$.

Graph B_{14}. $B_{14} = \{[P^{(1)}, I_2], [Q^{(1)}, I_{11}], [P^{(2)}, I_3], [Q^{(2)}, I_{10}], [I_1, I_9], [I_1, I_{11}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{10} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=5}^{0} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=1,3,7} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=2,4,5} [I_i, I_{13-i}]$, $\chi(B_{14}) = 4$, $G(B_{14}) = \{E, S\}$.

Graph B_{15}. $B_{15} = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_1], [I_1, I_{13}], [I_2, I_{10}], [I_3, I_9], [I_4, I_{11}], [I_7, I_{12}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{12} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=2,5,6,11} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=3,5,9,10} [I_i, I_{i+3}]$, $\chi(B_{15}) = 4$, $G(B_{15}) = \{E, (P^{(1)}, Q^{(1)})\}$.

Graph B_{16}. $B_{16} = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_{20}], [I_2, I_5], [I_3, I_{12}], [I_4, I_{15}], [I_6, I_{17}], [I_9, I_{18}], [I_{16}, I_{19}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{19} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1}^{9} [I_{2i-1}, I_{2i+2}] \cup \bigcup_{i \in M} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=1,3,11,13} [I_i, I_{i+7}] \cup (\bigcup_{i=1}^{2} + \bigcup_{i=6}^{8}) [I_i, I_{21-i}]$, $M = \{2, 4, 5, 11, 12, 14\}$, $\chi(B_{16}) = 2$, $G(B_{16}) = \{E, S\}$.

Graph B_{17}. $B_{17} = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_{20}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{31} [I_i, I_{i+1}] \cup (\bigcup_{i=4}^{6} + \bigcup_{i=12}^{14}) [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=10}^{15} [I_{2i-1}, I_{2i+2}] \cup \bigcup_{i=3,13,21,27} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i \in M} [I_i, I_{i+7}] \cup \bigcup_{i=1,11} [I_i, I_{i+9}] \cup (\sum_{k=0}^{2} \bigcup_{i=5k+4}^{5k+7}) [I_i, I_{35+2k-i}] \cup \bigcup_{i=1}^{8} [I_i, I_{21-i}] \cup \bigcup_{i=1}^{2} \{[I_i, I_{33-i}], [I_{19+2i}, I_{34-2i}]\}$, $M = \{2, 3, 11, 12, 22, 24\}$, $\chi(B_{17}) = 2$, $G(B_{17}) = \{E, S\}$.

Graph B_{18}. Der Graph B_{18} hat die Punkte $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, I_i, $i = 1, \ldots, 72$ und läßt sich aus zwei Kopien des Graphen B_{16} und einer Kopie des Graphen B_{17} zusammensetzen. Wir nennen die Punkte der beiden Kopien des Graphen B_{16} $P_k^{(1)}$, $Q_k^{(1)}$, $I_{k,i}$; $i = 1, \ldots, 20$; $k = 1, 2$; die Punkte der Kopie des Graphen B_{17} $P_3^{(1)}$, $Q_3^{(1)}$, $I_{3,i}$; $i = 1, \ldots, 32$ und setzen sodann:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= P^{(1)} \\ I_{1,i} &= I_i,\ i = 1, \ldots, 20 \\ Q_1^{(1)} &= I_{3,1} \\ P_2^{(1)} &= Q^{(1)} \\ I_{2,i} &= I_{20+1},\ i = 1, \ldots, 20 \\ Q_2^{(1)} &= P^{(1)} \\ P_3^{(1)} &= I_{1,20} \\ I_{3,i} &= I_{40+i},\ i = 1, \ldots, 32 \\ Q_3^{(1)} &= Q^{(1)} \end{aligned}$$

$\chi(B_{18}) = 2$, $G(B_{18}) = \{E\}$.

Graph B_{19}. $B_{19} = B_{16} - \{[I_9, I_{12}], [I_6, I_{15}]\} \cup \{[P^{(2)}, I_6], [Q^{(2)}, I_{15}], [P^{(3)}, I_9], [Q^{(3)}, I_{12}]\}$, $\chi(B_{19}) = 2$, $G(B_{19}) = \{E, S\}$.

Graph B_{20}. $B_{20} = B_{16} - [I_6, I_{15}] \cup \{[P^{(2)}, I_6], [Q^{(2)}, I_{15}]\}$, $\chi(B_{20}) = 2$, $G(B_{20}) = \{E, S\}$.

Graph B_{21}. $B_{21} = (\bigcup_{i=1}^{31} + \bigcup_{i=33}^{57}) [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=0}^{6} \bigcup_{k=0}^{1} [I_{8i+4-k}, I_{8i+7+k}] \cup (\bigcup_{i=6}^{14} + \bigcup_{i=22}^{25} + \bigcup_{i=27}^{29} + \bigcup_{i=38}^{46} + \bigcup_{i=49}^{50}) [I_i, I_{i+7}] \cup \bigcup_{i=0}^{2} [I_{16i+2}, I_{16i+9}] \cup (\bigcup_{i=0}^{5} + \bigcup_{i=8}^{12}) [I_{4i+1}, I_{4i+10}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \bigcup_{k=0}^{1} \{[I_{32i+7+k}, I_{32i+20-k}], [I_{32i+1+k}, I_{32i+26-k}],$

$[I_{(2-k)i+2+35k}, I_{(2-k)i+27(k+1)})]\} \cup \bigcup_{i \in M} [I_i, I_{i+15}] \cup \bigcup_{i=4,12,28,36} [I_i, I_{i+19}] \cup$
$\cup \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_5], [P^{(2)}, I_{10}], [Q^{(2)}, I_6], [I_{37}, I_{58}], [I_3, I_{30}], [I_3, I_{32}],$
$[I_{53}, I_{56}], [I_{15}, I_{24}], [I_{33}, I_{54}], [I_{35}, I_{44}], [I_5, I_{22}]\}$, $M = \{1, 6, 11, 17, 33, 38, 42, 43\}$, $\chi(B_{21}) = 2$, $G(B_{21}) = \{E, S\}$.

Graph B_{22}. $B_{22} = \bigcup_{i=1}^{27} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i \in M} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=14,19,23,25} [I_i, I_{i+3}] \cup$
$\cup \bigcup_{i \in N} [I_i, I_{i+4}] \cup \bigcup_{i \in 0} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=18,21,22} [I_i, I_{i+6}] \cup \bigcup_{i=2,18,21} [I_i, I_{i+7}] \cup$
$\cup \{[I_1, I_{17}], [I_4, I_{16}]\} \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[P^{(1+i)}, I_{1+6i}], [Q^{(1+i)}, I_{4+6i}]\}$
$M = \{1, 2, 3, 6, 9, 10, 13, 14, 20, 24, 25\}$, $N = \{2, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 23\}$, $O = \{1, 3, 5, 7, 13, 14, 15, 19, 21, 23\}$, $\chi(B_{22}) = 3$, $G(B_{22}) = \{E, S\}$.

Graph B_{23}. $B_{23} = \{[P^{(1)}, I_9], [Q^{(1)}, I_9], [I_1, I_{15}], [I_2, I_8], [I_3, I_{14}],$
$[I_3, I_{22}], [I_5, I_{17}], [I_9, I_{18}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{21} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1,12,13} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=16}^{19} [I_i, I_{i+3}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=1,2,4,13,16} [I_i, I_{i+4}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[I_{6i+7}, I_{6i+10}], [I_{10i+5}, I_{10i+12}], [I_{i+7}, I_{i+21}]\} \cup$
$\cup \bigcup_{i=1,2,6} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=4,10,11} \{[I_i, I_{i+8}], [I_i, I_{i+10}]\}$. $\chi(B_{23}) = 3$, $G(B_{23}) =$
$= \{E, (P^{(1)}, Q^{(1)})\}$.

Graph B_{24}. $B_{24} = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_3], [P^{(2)}, I_6], [Q^{(2)}, I_4], [P^{(3)}, I_{11}],$
$[Q^{(3)}, I_9], [I_8, I_{14}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{6} \{[I_i, I_{i+1}], [I_{i+7}, I_{i+8}]\} \cup \bigcup_{i=1,2,5,8,11,12} [I_i, I_{i+2}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=2,5,7\ 10} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=2,4,7,9} [I_i, I_{i+4}] \cup \bigcup_{i=1,7,9} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=1,3} [I_i, I_{i+11}]$,
$\chi(B_{24}) = 4$, $G(B_{24}) = \{E, S\}$.

Graph B_{25}. $B_{25} = \bigcup_{i=1}^{5} [I_1, I_{2i}] \cup \bigcup_{i=2}^{9} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=2}^{8} [I_i, I_{i+2}], \cup \{[I_2, I_5],$
$[I_3, I_9], [I_7, I_{10}], [P^{(1)}, I_2], [Q^{(1)}, I_{10}], [P^{(2)}, I_3], [Q^{(2)}, I_9]\}$, $\chi(B_{25}) = 4$, $G(B_{25}) = \{E, S\}$.

Graph B_{26}. $B_{26} = \bigcup_{i=1}^{25} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i \in M} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i \in N} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i \in 0} [I_i, I_{i+4}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=3,13,20} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=3,12,16,19} [I_i, I_{i+6}] \cup \bigcup_{i=2,11,19} [I_i, I_{i+7}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=1,6} [I_i, I_{i+8}] \cup \bigcup_{i=1,5,6} [I_i, I_{i+9}] \cup \bigcup_{i=1,5} [I_i, I_{i+10}] \cup \{[I_1, I_{12}], [P^{(1)}, I_2],$
$[Q^{(1)}, I_4], [P^{(2)}, I_{11}], [Q^{(2)}, I_{15}]\}$, $M = \{2, 5, 6, 8, 10, 14, 21, 23, 24\}$, $N = \{4, 13, 17, 19, 21, 23\}$, $0 = \{3, 13, 17, 20, 22\}$, $\chi(B_{26}) = 4$, $G(B_{26}) =$
$= \{E, S\}$.

Graph B_{27}. $B_{27} = \bigcup_{i=1}^{13} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=3,7,11} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=1,2,3,5} [I_i, I_{i+6}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=1,2,4,5,7} [I_i, I_{i+7}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[I_{8+2i}, I_{10+2i}], [I_{4+2i}, I_{12+2i}], [I_{4+i}, I_{13+i}]\} \cup$
$\cup \{[I_9, I_{13}], [I_1, I_6], [I_3, I_{13}], [P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_2]\}$, $\chi(B_{27}) = 4$, $G(B_{27}) =$
$= \{E, S\}$.

Graph B_{28}. $B_{28} = \{[P^{(1)}, I_1], [I_3, I_6]\} \cup \bigcup_{i=1}^{8} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1}^{7} [I_i, I_{i+2}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=1}^{2} \{[I_i, I_{i+6}], [I_i, I_{i+7}], [I_{3+i}, I_9]\}$, $\chi(B_{28}) = 4$, $G(B_{28}) = \{E\}$.

Graph B_{29}. $B_{29} = B_{32} - \{[I_4, I_5], [I_3, I_7]\} \cup \{[P^{(2)}, I_5], [Q^{(2)}, I_7],$
$[P^{(3)}, I_4], [Q^{(3)}, I_3]\}$, $\chi(B_{29}) = 5$, $G(B_{29}) = \{E, S\}$.

Graph B_{30}. $B_{30} = B_{32} - [I_3, I_4] \cup \{[P^{(2)}, I_4], [Q^{(2)}, I_3]\}$, $\chi(B_{30}) = 5$,
$G(B_{30}) = \{E, S\}$.

Graph B_{31}. $B_{31} = B_{32} - \{[I_8, I_9], [I_3, I_9], [I_3, I_4], [I_4, I_8]\} \cup \{[P^{(2)}, I_4],$
$[Q^{(2)}, I_3]\} \cup \bigcup_{i=15}^{27} [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=0}^{1} \{[I_{16+4i}, I_{18+4i}], [I_{20+5i}, I_{23+5i}], [I_{19+3i},$
$I_{23+3i}], [I_{15+3i}, I_{20+3i}], [I_{17+4i}, I_{24+4i}], [I_{8+9i}, I_{16+9i}], [I_{4+4i}, I_{15+4i}]\} \cup$
$\cup \bigcup_{i=0}^{2} \{[I_{24+i}, I_{26+i}], [I_{15+3i}, I_{21+3i}]\} \cup \{[I_{22}, I_{27}], [I_9, I_{15}], [I_{17}, I_{28}],$
$[I_9, I_{19}], [I_3, I_{16}]\}$, $\chi(B_{31}) = 5$, $G(B_{31}) = \{E, S\}$.

Graph B_{32}. $B_{32} = \{[P^{(1)}, I_1], [Q^{(1)}, I_2], [I_3, I_9], [I_{10}, I_{14}]\} \cup \bigcup_{i=1}^{13} [I_i, I_{i+1}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=10}^{12} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=1,10,11} [I_i, I_{i+3}] \cup \bigcup_{i=1}^{5} [I_i, I_{i+4}] \cup \bigcup_{i=1}^{4} [I_i, I_{i+5}] \cup \bigcup_{i=5}^{8} [I_i, I_{i+6}]$,
$\chi(B_{32}) = 5$, $G(B_{32}) = \{E, S\}$.

Graph B_{33}. $B_{33} = \{[I_1, I_3], [I_2, I_7], [I_2, I_8], [I_9, I_{13}], [I_2, I_{10}], [I_3, I_{14}],$
$[P^{(1)}, I_1]\} \cup \bigcup_{i=1}^{12} [I_i, I_{i+1}] \cup (\bigcup_{i=3}^{6} + \bigcup_{i=9}^{11}) [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=1,4,9,10} [I_i, I_{i+3}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=1,5,6} [I_i, I_{i+7}]$, $\chi(B_{33}) = 5$, $G(B_{33}) = \{E\}$.

Graph F_1. Siehe [3], (2.3), $G(F_1) = \{E\}$.

Graph F_2. $F_2 = (\bigcup_{i=1}^{7} + \bigcup_{i=9}^{15}) [I_i, I_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1,14} [I_i, I_{i+2}] \cup \bigcup_{i=4}^{7} [I_i, I_{i+6}] \cup$
$\cup \bigcup_{i=1,2,8,9} [I_i, I_{i+7}]$, $G(F_2) = \{E, T\}$, $T = \prod_{i=1}^{8} (I_i, I_{17-i})$.

Satz 1': *Sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe, dann ist es stets möglich, einen kubischen Graphen zu finden, dessen Automorphismengruppe einfach isomorph zu $\mathfrak{H}$ ist. Sie ist kovariant und besitzt keine Fixkante, falls die Gruppe mindestens zwei Elemente besitzt.*

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus Satz 1 und der Existenz der Graphen F_1 und F_2.

3. Beweis zu Satz 3

Es sei $\mathfrak{H}$ vorgegeben.

Hilfssatz 1: *Es gibt unendlich viele nicht-isomorphe kubische Graphen X_i, $i = 1, 2, \ldots$ mit $\chi(X_i) = 2$, $c(X_i) = 3$, $G(X_i) \cong \mathfrak{H}$. Sie sind kovariant und haben keine Fixkante, falls $\mathfrak{H} \not\cong \{E\}$.*

Beweis: Nach Satz 1' gibt es mindestens einen kubischen Graphen X mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Man kopiere ihn dreimal und nenne die Kopien $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$. Dann entferne man je drei einander entsprechende Kanten $\alpha^{(\nu)} = [P_\alpha^{(\nu)}, Q_\alpha^{(\nu)}]$ von $X^{(\nu)}$ und führe eine Kopie des Graphen B_1 ein, indem man jedes $P^{(\nu)}$ mit $P_\alpha^{(\nu)}$ und jedes $Q^{(\nu)}$ mit $Q_\alpha^{(\nu)}$ gleichsetzt. Man erhält einen kubischen Graphen X_1 mit $G(X_1) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X_1) = 2$, $c(X_1) = 3$. Er ist kovariant und hat keine Fixkante, falls $\mathfrak{H} \not\cong \{E\}$. Indem man diesen Vorgang wiederholt, erhält man eine Reihe von unendlich vielen nicht-isomorphen solchen Graphen X_i, $i = 1, 2, \ldots$

Hilfssatz 2: *Es gibt unendlich viele nicht-isomorphe kubische Graphen X_i, $i = 1, 2, \ldots$ mit $\chi(X_i) = 2$, $c(X_i) = 2$, $G(X_i) \cong \mathfrak{H}$. Sie sind kovariant und haben keine Fixkante, falls $\mathfrak{H} \not\cong \{E\}$.*

Beweis: Analog zu Hilfssatz 1, indem man von einem im Hilfssatz 1 konstruierten Graphen ausgeht, und den Graphen B_2 einbaut.

Alle folgenden Fälle sind analog. Ich gebe nur die Ergebnisse an:

Nr.	Hilfssatz n	χ	c	Beweis: man verwende den Hilfssatz und den Graphen	
3	3	3	3	2	B_3
4	3	3	2	3	B_3
5	3	3	1	1	B_4
6	4	4	2	1	B_5 und B_6
7	4	2	4	6	B_7
8	4	2	3	6	B_8
9	4	2	2	7	B_9
10	4	3	4	6	B_{10}
11	4	3	3	6	B_{11}
12	4	3	2	10	B_9
13	4	3	1	6	B_{12}
14	4	4	4	6	B_{13}
15	4	4	3	6	B_{14}
16	4	4	1	6	B_{15}
17	5	2	2	1	B_{18} und B_{16}
18	5	2	5	17	B_{19}
19	5	2	4	17	B_{20}
20	5	2	3	17	B_{21}
21	5	3	3	17	B_{22}
22	5	3	5	21	B_{19}
23	5	3	4	21	B_{20}
24	5	3	2	21	B_{16}
25	5	3	1	17	B_{23}
26	5	4	5	17	B_{24}
27	5	4	4	17	B_{25}
28	5	4	3	17	B_{26}
29	5	4	2	17	B_{27}
30	5	4	1	6	B_{28}
31	5	5	5	17	B_{29}
32	5	5	4	17	B_{30}
33	5	5	3	17	B_{31}
34	5	5	2	17	B_{32}
35	5	5	1	6	B_{33}

Satz 3 stellt eine Zusammenfassung der Hilfssätze 1 bis 35 dar und ist somit bewiesen.

Literatur

[1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", J. London Math. Soc. **27**, 85—92 (1952).

[2] *R. Frucht*, „Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe", Compositio Math. **6**, 239—250 (1938).

[3] *R. Frucht*, "Graphs of degree 3 with given abstract group", Canadian J. of Math. **1**, 365—378 (1949).

[4] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig, 1936.

[5] *G. Sabidussi*, "Graph properties independent of the automorphism group", (Erscheint demnächst.)

[6] *H. Whitney*, "Congruent graphs and the connectivity of graphs", Amer. J. of Math. **54**, 150—168 (1932).

Über einen Erweiterungssatz

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingegangen am 3. August 1956)

Sind R ein metrischer Raum, S eine abgeschlossene Teilmenge von R, A der eindimensionale Euklidische Raum und α eine stetige Abbildung von S in A, so gibt es eine stetige Fortsetzung von α über $R - S$. Aus diesem Erweiterungssatz, der zuerst von *Tietze* und in der Folge noch mehrfach* bewiesen wurde, folgt unmittelbar: wenn B ein Euklidischer Raum und β eine stetige Abbildung von S in B, so gibt es eine stetige Fortsetzung von β über $R - S$.

Ferner kann man auf das Tietzesche Theorem den Satz zurückführen: sind C eine Sphäre und γ eine stetige Abbildung von S in C, so existieren eine in R offene Menge T mit $S \subset T$ und eine stetige Fortsetzung von γ über $T - S$. Dagegen gibt es nicht notwendig eine stetige Fortsetzung von γ über $R - S$.

Hierauf seien D ein endlicher Euklidischer Baum**, E eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und F ein endliches Euklidisches Polyeder, ferner δ eine stetige Abbildung von S in D, ε eine stetige Abbildung von S in E und φ eine stetige Abbildung von S in F. Alsdann gelten folgende Erweiterungssätze:

1. Es gibt eine stetige Fortsetzung von δ über $R - S$.

2. Es gibt eine in R offene Menge U mit $S \subset U$ und eine stetige Fortsetzung von ε über $\overline{U} - S$.

3. Es gibt eine in R offene Menge V mit $S \subset V$ und eine stetige Fortsetzung von φ über $\overline{V} - S$.

Die Erweiterungssätze 1, 2 und 3 unterscheiden sich von dem Tietzeschen Theorem dadurch, daß der Bildraum nicht eine Gerade, sondern ein Baum beziehungsweise eine Mannigfaltigkeit oder ein Polyeder ist.

---

* Zum Beispiel von *Urysohn*: Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen. Mathem. Annalen **94**, 262–295 (1925).

** Im Sinne von *Menger*, d. h. ein zusammenhängendes eindimensionales endliches Euklidisches Polyeder, welches keine 1-Sphäre enthält.

Der Fall, in welchem der Bildraum eine Sphäre G, ferner R kompakt und dim $R \leq (\dim G)+1$, wird von einem *Hopf*schen Erweiterungssatz behandelt. Offenbar stellt der Erweiterungssatz 1 eine glatte Verallgemeinerung des Tietzeschen Satzes dar.

Der vorliegende kurze Artikel dient dem Zweck, den Erweiterungssatz 2 unter der Voraussetzung zu beweisen, daß R kompakt. Die beiden anderen Erweiterungssätze werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

Wir wollen also zeigen:

Seien P ein kompakter metrischer Raum, Q eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit, A eine abgeschlossene Teilmenge von P und f eine stetige Abbildung von A in Q. Dann gibt es eine in P offene Menge U mit

$$A \subset U$$

und eine stetige Fortsetzung von f über $\overline{U} - A$.

Beweis. — Wegen des *Menger*schen Einbettungssatzes kann man annehmen, es liege Q in dem Euklidischen Raume R. Seien $n > 0$ die Dimension von Q und $V_1, V_2, \ldots$ endlich viele in Q offene Mengen, $\Sigma V_i = Q$ und jedes V_i zum n-dimensionalen Euklidischen Raume homöomorph.

Dann gibt es eine positive Zahl α derart, daß zu jeder Teilmenge X aus Q, deren Durchmesser $< \alpha$ ist, eine Zahl i mit $X \subset V_i$ existiert. Weiter gibt es eine positive Zahl β mit der Eigenschaft: wenn Y eine Teilmenge von A und der Durchmesser von Y kleiner als β, so hat die Menge $f(Y)$ einen Durchmesser $< \alpha$.

Seien $A_1, \ldots, A_m$ endlich viele abgeschlossene Teilmengen von A, $\Sigma A_i = A$ und der Durchmesser eines jeden A_i kleiner als β. Dann existiert für $i = 1, \ldots, m$ eine Zahl $\zeta(i)$ mit

$$f(A_i) \subset V_{\zeta(i)}.$$

Seien l eine der Zahlen $1, \ldots, m$ und, wenn a, b Punkte aus R bedeuten, $d(a, b)$ der Euklidische Abstand dieser Punkte. Hierauf wollen wir zeigen:

Es existiert eine positive Zahl γ so beschaffen, daß, wenn B die Menge aller Punkte p aus A mit $d(p, A_l) \leq \gamma$ bezeichnet, statt $f(A_l) \subset V_{\zeta(l)}$ sogar

$$f(B) \subset V_{\zeta(l)}.$$

Das ergibt sich wie folgt. Da $V_{\zeta(l)}$ eine in Q offene und $f(A_l)$ eine in Q abgeschlossene Menge, gibt es eine positive Zahl δ mit

$$d(f(A_l), \overline{V}_{\zeta(l)} - V_{\zeta(l)}) > \delta.$$

Nunmehr bestimmen wir die Zahl γ durch die Festsetzung: sind p_1, p_2 Punkte aus A und $d(p_1, p_2) \leq \gamma$, so gilt

$$d(f(p_1), f(p_2)) < \delta.$$

Bedeutet schließlich p einen Punkt aus B, so gibt es, da A_l kompakt, einen Punkt q in A_l mit $d(p, q) \leq \gamma$. Aus $d(f(p), f(q)) < \delta$ sowie

$$f(p) \in V_{\zeta(l)} \text{ und } d(f(q), \overline{V}_{\zeta(l)} - V_{\zeta(l)}) < \delta$$

folgt daher $f(q) \in V_{\zeta(l)}$, wie behauptet.

Hierauf bedeute U_1 eine in P offene Menge, die A_1 enthält und überdies die Beziehung

$$f(A \,.\, \overline{U}_1) \subset V_{\zeta(1)}$$

erfüllt. Nach dem Tietzeschen Erweiterungssatz gibt es eine stetige Abbildung φ_1 von $\overline{U}_1$ in $V_{\zeta(1)}$, die auf $A \,.\, \overline{U}_1$ mit f übereinstimmt.

Wir setzen $f_1(p) = f(p)$ für $p \in A$ und $f_1(p) = \varphi_1(p)$ für $p \in \overline{U}_1 - A$. Dann ist f_1 eine stetige Abbildung von $A + \overline{U}_1$ in Q, da f und φ_1 auf der Menge $A \,.\, (\overline{U_1 - A})$ übereinstimmen.

Es bezeichne j eine der Zahlen $1., \ldots, m-1$. Alsdann machen wir die für $j = 1$ richtige Annahme, es existierten in P offene Mengen $U_1, \ldots, U_j$ mit

$$A_i \subset U_i, \; i = 1, \ldots, j,$$

und eine stetige Abbildung f_j von $A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j$ in Q, die auf A mit f übereinstimmt.

Wegen $f_j(A_{j+1}) = f(A_{j+1}) \subset V_{\zeta(j+1)}$ gibt es eine in P offene Menge U_{j+1}, die A_{j+1} enthält und außerdem die Beziehung

$$f_j((A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j) \,.\, \overline{U}_{j+1}) \subset V_{\zeta(j+1)}$$

erfüllt. Eine Anwendung des Tietzeschen Erweiterungssatzes liefert eine stetige Abbildung φ_{j+1} von $\overline{U}_{j+1}$ in $V_{\zeta(j+1)}$, die auf $(A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j) \,.\, \overline{U}_{j+1}$ mit f_j übereinstimmt.

Setzen wir alsdann $f_{j+1}(p) = f_j(p)$ für alle Punkte p der Menge $A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j$ und $f_{j+1}(p) = \varphi_{j+1}(p)$ für $p \in \overline{U}_{j+1} - (A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j)$, so ist f_{j+1} eine stetige Abbildung von $A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_{j+1}$ in Q, da f_j und φ_{j+1} auf der Menge

$$(A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j) \,.\, \overline{(\overline{U}_{j+1} - (A + \overline{U}_1 + \ldots + \overline{U}_j))}$$

übereinstimmen.

Mithin existieren in P offene Mengen $W_1, \ldots, W_m$ derart, daß $A_i \subset W_i$ für $i = 1, \ldots, m$, und eine stetige Abbildung von $\Sigma \overline{W}_i$ in Q, die auf A mit f übereinstimmt. Setzen wir noch $U = \Sigma W_i$, so ist der obige Satz bewiesen.

Projektionen projektiver Räume

Von

Fritz Hohenberg, Graz

(Eingegangen am 6. September 1956)

Bei vielen Abbildungen der darstellenden Geometrie projiziert man den dreidimensionalen projektiven Raum aus einem Zentrum Z_1 auf eine Bildebene Π_1 und aus einem Zentrum Z_2 auf eine Bildebene Π_2; hierauf führt man Π_1 und Π_2 in eine gemeinsame Zeichenebene Π über, entweder durch nichtperspektive Kollineationen (man spricht dann von einem allgemeinsten Zweibildersystem) oder durch Projektion aus einem Zentrum Z auf Π (allgemeines Zweibildersystem). Gelegentlich verwendet man auch Zweispurensysteme; man schneidet die Geraden und Ebenen des Raumes mit zwei Spurebenen Π_1, Π_2 und führt Π_1 und Π_2 wie beim Zweibildersystem in eine Zeichenebene über. In der herkömmlichen Behandlung einzelner Abbildungen, z. B. des Grund- und Aufrißverfahrens oder der Perspektive, werden Zweibildersysteme und Zweispurensysteme auch nebeneinander verwendet; man stellt Raumpunkte im Zweibildersystem durch geordnete Punktepaare in Π dar, legt aber Raumgeraden und Raumebenen zuweilen durch ihre Spurpunkte bzw. Spurgeraden fest. — Auch axonometrische Darstellungen ordnen sich hier ein; ein zentralaxonometrisches Bild eines Gegenstandes läßt sich durch Affinität in einen Zentralriß desselben Gegenstandes überführen, ein parallelaxonometrisches Bild durch Ähnlichkeit in einen Parallelriß (Satz von *Pohlke*)[1].

Daß man bei einer Projektion des Raumes das Zentrum als Punkt wählt, beruht nur darauf, daß man das Sehen mit einem Auge zum Vorbild nimmt und ein anschauliches Bild erwartet. Daß man den Raum auf eine Ebene projiziert, ist nur eine Rücksicht auf das graphische

[1] Zweibildersysteme, Zweispurensysteme und Axonometrie werden eingehend untersucht in *E. Müllers* Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 1, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von *E. Kruppa*, Verlag Deuticke, Wien, 1923.

Konstruieren. *Es sollen hier Projektionen des reellen oder des komplexen projektiven n-dimensionalen Raumes R_n betrachtet werden, bei denen als Zentrum und Bildraum beliebige lineare Teilräume des R_n auftreten.* Abbildungen, die sonst ein Außenseiterdasein führen, erfahren dadurch eine systematische Einordnung, z. B. kotierte Projektion, Netzriß usw. Der im Satz von *Pohlke* ausgeschlossene Fall, daß die Achsenbilder auf einer Geraden liegen, erhält eine geometrische Deutung. Zweibildersysteme und Zweispurensysteme erscheinen als sehr spezielle Sonderfälle einer und derselben allgemeineren Abbildung. Zugleich wird man auf neue, auch konstruktiv günstige Abbildungen geführt. Auf kollineare Umformungen innerhalb eines Bildraumes werde verzichtet. — Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Summe der Dimensionen von Zentrum und Bildraum gleich, größer oder kleiner als $n-1$ ist.

I. Projektionen mit dim Z + dim $\Pi = n-1$.

Das Zentrum Z sei ein linearer Teilraum des R_n und habe die Dimension dim Z. Der Bildraum Π sei ein linearer Teilraum des R_n von der Dimension dim Π. Der lineare Verbindungsraum $[ZP]$ von Z mit einem Punkt P, der Z nicht angehört, hat die Dimension $1 + \dim Z$. Er schneidet Π im Bild P' von P. P' ist ein linearer Teilraum des R_n und hat die Dimension $(1 + \dim Z) + \dim \Pi - n$, wenn Z und Π keinen Punkt gemein haben. Ist $\dim Z + \dim \Pi = n-1$ und haben Z und Π keinen Punkt gemein, so ist P' ein Punkt. P' ist unbestimmt, wenn P in Z liegt. — Der Fall, daß Π ein Punkt ist und alle Punkte des Raumes (außer denen von Z) sich auf diesen Punkt abbilden, ist geometrisch bedeutungslos; um ihn auszuschließen, muß man $\dim \Pi \geqq 1$, $\dim Z \leqq n-2$ voraussetzen.

Daß Z und Π im R_n liegen sollen, ist keine wesentliche Einschränkung. Denn lägen Z und Π ganz oder zum Teil außerhalb des R_n, so könnte man den linearen Verbindungsraum R_m von Z, Π und R_n bilden; die Projektion des R_n aus Z auf Π umfaßt dann als Teilaufgabe auch die Projektion des R_n aus Z auf Π.

Eine Projektion auf eine Bildebene ($\dim \Pi = 2$) heiße ein *Riß*. Eine Projektion auf eine Bildgerade ($\dim \Pi = 1$) heiße eine *Kotierung*; man pflegt auf Π eine Koordinate einzuführen und das Bild durch eine Zahlenangabe (Koordinate, Kote) zu ersetzen.

Im R_3 kann Z wegen $\dim Z \leqq n-2$ ein Punkt oder eine Gerade sein. *Es gibt daher im R_3 folgende Projektionen*:

a) Projektion aus einem Punkt Z auf eine Ebene Π, also ein Riß. Vom affinen Standpunkt sind, wenn Π eine eigentliche Ebene ist, Zentralrisse und Parallelrisse zu unterscheiden, je nachdem Z ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt ist. Vom euklidisch-metrischen Standpunkt kann man bei Parallelrissen Normalrisse und Schrägrisse unterscheiden, je nachdem die durch Z laufenden Geraden (Sehstrahlen) zu Π normal sind oder nicht.

b) Projektion aus einer Geraden Z auf eine Gerade Π, also eine Kotierung. Auch hier kann man, wenn Π eine eigentliche Gerade ist, Zentralkotierungen und Parallelkotierungen unterscheiden, je nachdem Z eine eigentliche oder uneigentliche Gerade ist. Bei Parallelkotierungen kann man, je nachdem die durch Z gehenden „Sehebenen" zu Π normal sind oder nicht, Normalkotierungen und Schrägkotierungen unterscheiden. Jeder Bildpunkt auf Π kann durch eine Kotenangabe ersetzt werden.

Sind Z und Π im R_n gegeben, so ist P durch P' noch nicht bestimmt; P liegt irgendwo im linearen Verbindungsraum $[Z\,P']$. Um P eindeutig festzulegen, verwendet man mehrere Projektionen nebeneinander. Es seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ die Zentren, $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ die Bildräume; so entsteht ein *k-Bildersystem*, in dem ein Punkt P allgemeiner Lage die Bildpunkte $P', P'', \ldots, P^{(k)}$ hat. Je nachdem bei allgemeiner Lage der Zentren und Bildräume $N = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 + \ldots + \dim \Pi_k \gtreqless n$ ist, gilt: *1.* $P', P'', \ldots, P^{(k)}$ können nicht frei gewählt werden, sondern sie sind abhängig, d. h. an „Ordner" gebunden, oder *2.* P ist durch die frei wählbaren Punkte P' in Π_1, P'' in Π_2, $\ldots$, $P^{(k)}$ in Π_k bestimmt, oder *3.* P ist durch $P', P'', \ldots, P^{(k)}$ noch nicht bestimmt.

$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ können noch durch Kollineationen, z. B. auch durch Projektionen, in einen „*Zeichenraum*" Π übergeführt werden.

Beispiele:

Fall 1. $N > n$.

a) *Gewöhnliche Zweibildersysteme im* R_3. $n = 3$, $\dim Z_i = 0$, $\dim \Pi_i = 2$ $(i = 1, 2)$, $N = 4$. Projektion des R_3 aus zwei Punkten auf zwei Bildebenen (siehe Einleitung).

b) *Gewöhnliche Mehrbildersysteme im* $R_n (n > 3)$ mit $\dim \Pi_i = 2$ und $N > n$ sind wiederholt untersucht worden[2].

c) *Eine Abbildung des* R_5 *auf zwei dreidimensionale Bildräume* (als Beispiel einer Abbildung des R_n auf Bildräume, deren Dimension größer

[2] Siehe z. B. *P. H. Schoute*, Mehrdimensionale Geometrie, Sammlung Schubert, Bd. 35, 1902, Göschensche Verlagsbuchhandlung, Leipzig, I. Band, S. 84—125.

als 2 ist). Im R_5 seien homogene kartesische Koordinaten $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ mit dem Ursprung E_0 und den Fernpunkten E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 der Achsen eingeführt. Der Punkt $P(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ des R_5 werde aus $Z_1 = [E_4\, E_5]$ auf Π_1 (Grundpunkte E_0, E_1, E_2, E_3) und aus $Z_2 = [E_1\, E_2]$ auf Π_2 (Grundpunkte E_0, E_4, E_5, E_3) projiziert. Es entstehen die Bildpunkte $P'(x_0, x_1, x_2, x_3)$ und $P''(x_0, x_4, x_5, x_3)$. Zweckmäßig werden Π_1 und Π_2 in einem dreidimensionalen Zeichenraum Π mit den inhomogenen kartesischen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 so vereinigt, daß

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_0} \text{ bzw. } = \frac{x_4}{x_0}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{x_0} \text{ bzw. } = \frac{x_5}{x_0}, \quad \xi_3 = \frac{x_3}{x_0}.$$

Auch diese Vereinigung ist eine Projektion, es wird nämlich Π_2 aus der Geraden $Z(x_0 = 0,\ x_3 = 0,\ x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_5 = 0)$ auf $\Pi_1 \equiv \Pi$ projiziert. P' und P'' liegen in gleicher Höhe ξ_3, sind also an waagrechte Ebenen („Schichtenebenen", Ordner) gebunden. Durchläuft P eine eigentliche Gerade g, die weder Z_1 noch Z_2 trifft, so durchlaufen P' und P'' eigentliche Geraden g', g''; gleich hohe Punkte auf g' und g'' entsprechen einander, g' und g'' sind ähnliche Punktreihen. Schneidet g jedoch Z_1, so ist g' ein Punkt, g'' eine Gerade in der Schichtebene durch g'. Durchläuft P eine eigentliche Ebene ε, die weder Z_1 noch Z_2 trifft, so sind ε' und ε'' eigentliche Ebenen; ε' und ε'' sind affin, jede Schichtenebene schneidet ε' und ε'' in entsprechenden Geraden. Enthält ε einen Punkt von Z_1 oder ganz Z_1, so ist ε' eine Gerade bzw. ein Punkt. Durchläuft P einen eigentlichen R_3 des R_5, so bilden P' und P'' in jeder Schichtenebene eine ebene Affinität, in ganz Π eine räumliche Affinität. Diese räumliche Affinität ist die identische Zuordnung, $P' = P''$, wenn P den Koinzidenz-R_3 des R_5 durchläuft, der durch $x_1 - x_4 = 0$, $x_2 - x_5 = 0$ gegeben ist. Durchläuft P einen eigentlichen R_4 des R_5, der durch eine lineare Gleichung $u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 + u_5 x_5 = 0$ gegeben ist, so sind in Π in jeder Ebene $\xi_3 = \text{const.}$ die Punkte $P'(\xi_1', \xi_2', \xi_3')$ und $P''(\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'')$ durch eine lineare Korrelation $(u_0 + u_3\, \xi_3') + (u_1\, \xi_1' + u_2\, \xi_2') + (u_4\, \xi_1'' + u_5\, \xi_2'') = 0$, $\xi_3'' = \xi_3'$ miteinander verknüpft. Von hier aus lassen sich projektive und affine Konstruktionen des R_5 in der Abbildung durchführen.

Die Abbildung ist auch konstruktiv günstig, wenn man Π_1 und Π_2 etwa in Grund- und Aufriß darstellt; dabei bilde sich P' auf $(P')'$ und $(P')''$, P'' auf $(P'')'$ und $(P'')''$ ab. Der euklidische Abstand zweier Punkte P und Q läßt sich dann vektoriell aus den Strecken $(P')'\,(Q')'$, $(P'')'\,(Q'')'$ und dem Höhenunterschied von P' und Q' (oder von P''

und Q') zusammensetzen. Von hier aus kann man metrische Konstruktionen dieser Abbildung entwickeln. — Als konstruktives Hilfsmittel dienen dabei besondere kongruente Transformationen des R_5, die sich in den Bildern einfach darstellen. Man kann den Raum Π_1 der P' und den Raum Π_2 der P'' Schraubungen um lotrechte Achsen unterwerfen, wobei die Schraubhöhen für beide Schraubungen gleich sind; dann bleibt der Abstand zweier Punkte des R_5 unverändert. Noch mehr: Man kann etwa in Π_1 ein neues kartesisches Koordinatensystem $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_4, \bar{\xi}_3)$, in Π_2 ein neues kartesisches Koordinatensystem $(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_5, \bar{\xi}_3)$ wählen, wobei die $\bar{\xi}_3$-Achse wieder lotrecht steht und die $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_4)$-Ebene und die $(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_5)$-Ebene in gleicher Höhe liegen. Setzt man dann die Koordinaten $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_4, \bar{\xi}_3$ jedes Punktes P' und $\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_5, \bar{\xi}_3$ jedes Punktes P'' zu Koordinaten $\xi_1 = \bar{\xi}_1, \xi_2 = \bar{\xi}_4, \xi_3 = \bar{\xi}_3$ bzw. $\xi_4 = \bar{\xi}_2, \xi_5 = \bar{\xi}_5, \xi_3 = \bar{\xi}_3$ neuer Punkte $\overline{P}'$, $\overline{P}''$ im alten Koordinatensystem zusammen, so entspricht dem im R_5, daß jedem Punkt P ein neuer Punkt $\overline{P}$ zugeordnet wird. Diese Zuordnung ist eine kongruente Transformation, denn zwei Punkte P, Q und ihre entsprechenden Punkte $\overline{P}, \overline{Q}$ haben dieselbe Entfernung[3].

Die Abbildung hängt mit der Liniengeometrie des dreidimensionalen Raumes R zusammen. Bildet man die Geraden von R auf die Punkte der *Plücker*schen Mannigfaltigkeit im R_5 ab und unterwirft man diese der hier behandelten Abbildung auf die Punktepaare im Raum Π, so ergibt sich eine Zuordnung zwischen dem Strahlraum R und dem Zeichenraum Π. Wir lassen R mit Π zusammenfallen und schreiben die kartesischen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 in der homogenen Form $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Eine nicht waagrechte Gerade g von R habe den Fernpunkt $G_1(0, \eta_1, \eta_2, 1)$ und sie schneide $\xi_3{=}0$ im Punkt $G_2(1, \zeta_1, \zeta_2, 0)$. g hat die Linienkoordinaten

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = \eta_1 : \eta_2 : 1 : \zeta_2 : -\zeta_1 : (\eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2),$$

die wir der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_0, x_4, x_5, x_3$ identifizieren. Der Geraden g ist der Punkt $G(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ im R_5 zugeordnet. Er hat in unserer Abbildung die Bildpunkte mit den inhomogenen kartesischen Koordinaten $G'(\eta_1, \eta_2, \eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2)$ und $G''(\zeta_2, -\zeta_1, \eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2)$. Das bedeutet, daß $(G')' = (\eta_1, \eta_2, 0)$ aus G_1 durch Projektion aus dem Punkt $(0, 0, -1)$ der ζ_3-Achse hervorgeht, und daß $(G'')' = (\zeta_2, -\zeta_1, 0)$ aus G_2 durch negative Vierteldrehung um die ξ_3-Achse hervorgeht. Die

[3] Analoge Transformationen im R_4 untersuchte *E. Kruppa*, Ein Beitrag zur darstellenden Geometrie des R_4, Mon. f. Math. u. Phys. 43 (1936), 157—160.

*Plücker*sche Identität lautet $x_0 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_5 = 0$; sie bedeutet, daß die in Π in gleicher Höhe liegenden Punkte

$$G'(\xi_1' = \frac{x_1}{x_0}, \xi_2' = \frac{x_2}{x_0}, \xi_3' = \frac{x_3}{x_0}) \text{ und } G''(\xi_1'' = \frac{x_4}{x_0}, \xi_2'' = \frac{x_5}{x_0}, \xi_3'' = \frac{x_3}{x_0})$$

konjugiert sind bezüglich des Drehparaboloids $\xi_1^2 + \xi_2^2 = -\xi_3$. Dieses Drehparaboloid ist Bild der Schnittfläche der Plückerschen Mannigfaltigkeit im R_5 mit dem Koinzidenzraum $x_1 - x_4 = 0$, $x_2 - x_5 = 0$ des R_5.

Innerhalb der untersuchten Abbildung des R_5, die ein aus zwei Projektionen bestehendes Zweibildersystem ist, ergibt sich also eine Abbildung der *Plücker*schen Mannigfaltigkeit des R_5, die die Geraden von R darstellt. Dabei tritt als überzählige Linienkoordinate $\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \xi_2$ gerade die Höhe auf, in der sich das Punktepaar G', G'' befindet. Man kann auf diese überzählige Koordinate verzichten und zu den Grundrissen $(G')'$, $(G'')'$ übergehen; aus dem gewöhnlichen Zweispurensystem, das g auf G_1 und G_2 abbildet, gehen $(G')'$ und $(G'')'$ auf die angeführte einfache Art hervor. Daraus erkennt man, wie sich Strahlbüschel und andere Gebilde des Strahlraums abbilden; z. B. lautet die Bedingung, daß zwei Geraden g und h einander schneiden, daß $(G')'(H')'$ und $(G'')'(H'')'$ zueinander normal sind. — Zwei gegebene Punkte $(G')' = (\eta_1, \eta_2, 0)$ und $(G'')' = (\zeta_2, -\zeta_1, 0)$ liefern die Linienkoordinaten $p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} = \eta_1 : \eta_2 : 1 : \zeta_2 : -\zeta_1$ von g; die überzählige Linienkoordinate $p_{12} = \eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2$ von g erhält man als negatives inneres Produkt der Vektoren vom Ursprung nach $(G')'$ bzw. $(G'')'$.

Fall 2. $N = n$.

a) Kotierte Projektion im R_3. Ein Punkt P ist durch einen Riß P' (aus einem Punkt Z_1 auf eine Ebene Π_1) und eine Kotierung P'' (aus einer Geraden Z_2 auf eine Gerade Π_2) bestimmt, wenn Z_1 nicht auf Z_2 liegt, $P \neq Z_1$ ist und P nicht auf Z_2 liegt. P' in Π_1 und P'' in Π_2 können unabhängig voneinander gewählt werden. Zumeist ist P' Normalriß, Z_2 Ferngerade von Π_1, Π_2 eine durch Z_1 gehende Gerade.

b) Darstellung des R_n durch Kotierungen. n Kotierungen (Projektionen aus $(n-2)$-dimensionalen Zentren Z_i auf Bildgeraden Π_i) liefern i. a. n unabhängige Bildpunkte $P', P'', \ldots, P^{(n)}$. $P^{(i)}$ ist dann und nur dann unbestimmt, wenn P auf Z_i liegt. Weiß man, daß P auf Z_i liegt, so ist P bereits durch $P', \ldots, P^{(i-1)}, P^{(i+1)}, \ldots, P^{(n)}$ bestimmt. — Die *Einführung affiner oder kartesischer Koordinaten im R_n* ist ein Sonderfall; die Geraden Π_i gehen hier durch einen eigentlichen Punkt U (Ursprung),

Z_i ist der lineare Verbindungsraum der Fernpunkte von $\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_n$. Die Bildpunkte $P', P'', \ldots, P^{(n)}$ lassen sich nach Wahl eines Einheitspunktes im R_n durch Koten (Koordinaten) ersetzen. — Ein anderer Sonderfall liegt vor, wenn alle Π_i in eine Gerade Π fallen; für $n = 2$ ergibt sich, wenn die Sehstrahlen durch Z_1, Z_2 mit Π die Winkel $\pm 45^0$ einschließen, die *zyklographische Abbildung der Ebene* auf die geordneten Punktepaare einer Geraden Π.[4] Für $n = 2$ ergibt sich ferner, wenn Z_1 und Z_2 die absoluten Kreispunkte des R_2 sind, die Abbildung der reellen Punkte P des R_2 auf die geordneten Paare konjugiert komplexer Punkte P', P'' auf Π (*Gaußsche Zahlenebene*).

c) Darstellung des $R_{2\nu}$ durch ν unabhängige Risse. Räume von gerader Dimension $n = 2\nu$ (mit $\nu > 1$) kann man auf ν Ebenen $\Pi_1, \ldots, \Pi_\nu$ projizieren. Bekannt ist vor allem die Abbildung des R_4 durch Projektionen aus zwei Geraden auf zwei Bildebenen. Bekannt ist auch die auf Projektionen zurückführbare Darstellung des R_ν im komplexen Gebiet (komplexe Koordinaten $z_k = x_k + i\, y_k$) durch ν *Gaußsche* Zahlenebenen für $z_1, \ldots, z_\nu$.

d) Darstellung des $R_{2\nu}$ durch Projektionen auf zwei R_ν. Π_1 und Π_2 sind von der Dimension ν und haben einen Punkt gemein. Z_1 und Z_2 haben die Dimension $\nu - 1$. Z. B. kann der komplexe ν-dimensionale Raum R in einem $R_{2\nu}$ mit den reellen kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_\nu$, $y_1, \ldots, y_\nu$ dargestellt und jeder reelle eigentliche Punkt P dieses $R_{2\nu}$ auf $P'(x_1, \ldots, x_\nu)$ in Π_1 und $P''(y_1, \ldots, y_\nu)$ in Π_2 abgebildet werden; wir vereinigen Π_1 und Π_2 so mit R, daß die Achsen z_k von R sich mit den Achsen x_k und y_k decken. P sei ein eigentlicher Punkt. Ist P reell, so ist $P' = P$, $P'' =$ Ursprung U. Ist aber P komplex, und $\overline{P}$ konjugiert komplex zu P, so ist P' der Zentralpunkt der *v. Staudt*schen Involution auf der reellen Geraden $[P\overline{P}]$, deren Doppelpunkte P und $\overline{P}$ sind. Trägt man den Vektor UP'' von P' bis (P) auf, so ist (P) ein Potenzpunkt jener Involution, und P ist auch durch P' und (P) darstellbar.

Fall 3. $N < n$.

Hier ist ein Raumpunkt P durch seine Bildpunkte $P', \ldots, P^{(k)}$ i. a. nicht eindeutig bestimmt, vielmehr schneiden sich die „Sehräume" $[Z_i\, P^{(i)}]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ in einem linearen Teilraum p von einer Dimension > 0. Dann können $P', \ldots, P^{(k)}$ als Bilder von p aufgefaßt werden. *Beispiele*:

---

[4] *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 2, Die Zyklographie, herausgeg. v. *J. L. Krames*, Verlag Deuticke, Wien, 1929, S. 434ff.

a) *Jede einzelne Projektion*; entsteht P' durch Projektion von P aus Z auf Π, so ist P' zugleich Projektion von $p = [ZP']$.

b) Im R_3 seien $Z_1 = \Pi_2$ und $Z_2 = \Pi_1$ windschiefe Geraden. Durch jeden Raumpunkt P, der weder auf Z_1 noch auf Z_2 liegt, geht eine Treffgerade p; sie schneidet Π_1 in P', Π_2 in P''. Allgemeiner: Im R_n sei $\dim Z_1 = n_1$, $\dim \Pi_1 = n - n_1 - 1$, $\dim Z_2 = n_2$, $\dim \Pi_2 = n - n_2 - 1$, also $N = 2n - n_1 - n_2 - 2$. Es sei $N < n$, also $n_1 + n_2 > n - 2$. P' und P'' seien die Bilder eines Raumpunktes P. Umgekehrt schneiden sich $[Z_1 P']$ und $[Z_2 P'']$ in einem linearen Teilraum p von der positiven Dimension $n_1 + 1 + n_2 + 1 - n$. P', P'' sind Bildpunkte jedes Punktes von p.

c) *Axonometrie im* R_3. Nach dem Satz von *Pohlke* ist das axonometrische Bild zu einer Parallelprojektion des dargestellten Gegenstands ähnlich. Man darf die axonometrischen Bilder U^s, A^s, B^s, C^s des Ursprungs U und der Einheitspunkte A, B, C auf den Achsen x, y, z willkürlich wählen; nur dürfen U^s, A^s, B^s, C^s nicht auf einer Geraden liegen, denn dann läge das Bild P^s jedes Punktes P auf dieser Geraden.

Aber auch dieser Ausnahmefall hat eine geometrische Bedeutung. Es läßt sich nämlich zeigen: *Liegen* U^s, A^s, B^s, C^s *auf einer Geraden* Π, *so ist das axonometrische Bild eine Parallelkotierung.* Im Gegensatz zum Satz von *Pohlke* ist die Einheitsstrecke e im Raum hier nicht durch das Bild bestimmt, sondern wählbar. Der Nachweis besteht wie beim Satz von *Pohlke* darin, daß man die möglichen Lagen des Zentrums Z (hier eine Ferngerade) und des Dreibeins $U\,A\,B\,C$ ermittelt. Man kann zunächst annehmen, daß U mit U^s zusammenfällt. Dann sei Π im kartesischen Koordinatensystem x, y, z durch $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ (unbekannte Richtungscosinus a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, der Parameter t ist die Entfernung des Punktes (x, y, z) von U) dargestellt. Durch die noch unbekannte Ferngerade Z gehen die Sehebenen $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ (α, β, γ fest, δ veränderlich). e sei die Einheitsstrecke auf x, y, z; $e_x = U^s A^s$, $e_y = U^s B^s$, $e_z = U^s C^s$ seien die Einheitsstrecken im Bild. Durch $A(e, 0, 0)$ geht die Sehebene mit $\alpha e + \delta = 0$, $\delta = -\alpha e$, also $\alpha(x - e) + \beta y + \gamma z = 0$. Sie schneidet Π in $A^s(ae_x, be_x, ce_x)$, also ist $\alpha(ae_x - e) + \beta be_x + \gamma ce_x = 0$ oder $\alpha e = (\alpha a + \beta b + \gamma c)\, e_x$. Analog ist $\beta e = (\alpha a + \beta b + \gamma c)\, e_y$ und $\gamma e = (\alpha a + \beta b + \gamma c)\, e_z$. Daraus folgt

$$\alpha : \beta : \gamma = e_x : e_y : e_z, \tag{1}$$

$$e = e_x\, a + e_y\, b + e_z\, c. \tag{2}$$

Durch (1) ist im Koordinatensystem x, y, z der Normalenvektor der Sehebenen gegeben; er ist der Ortsvektor des Punktes (e_x, e_y, e_z). Nach (2) ist e das innere Produkt jenes Ortsvektors mit dem Einheitsvektor auf Π. Daraus folgt im Reellen

$$e^2 \leqq e_x^2 + e_y^2 + e_z^2. \tag{3}$$

Bei der Ermittlung von $UAB\,C$ aus $U^sA^sB^sC^s$ sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Länge von e sei nicht vorgeschrieben. Man lege U mit U^s zusammen. a, b, c kann man wählen, d. h. man legt durch $U = U^s$ drei beliebige paarweise normale Achsen x, y, z; auf ihnen trägt man der Reihe nach e_x, e_y, e_z auf und erhält nach (1) den Normalenvektor der Sehebenen, also die Ferngerade Z. Die Sehebenen durch A^s, B^s, C^s schneiden dann x, y, z in A, B, C. Z. B. schneidet die Sehebene durch $A^s(ae_x,\ be_x,\ ce_x)$, nämlich $e_x(x-ae_x) + e_y(y-be_x) + e_z(z-ce_x) = 0$, die x-Achse in $A(ae_x + be_y + ce_z,\ 0,\ 0)$; analog für B und C.

b) Ist die Länge von e vorgeschrieben, so sind a, b, c wegen (2) nicht frei wählbar. Man wähle irgendwo ein kartesisches Dreibein $\bar{U}\,\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ mit $\bar{U}\,\bar{A} = \bar{U}\,\bar{B} = \bar{U}\,\bar{C} = e$, bestimme darin nach (1) den Normalenvektor der Sehebenen und lege die Sehebene $\bar{\varepsilon}$ z. B. durch $\bar{A}$. Die Kugel um $\bar{U}$ mit dem Radius $e_x = U^sA^s$ schneidet $\bar{\varepsilon}$ in einem Kreis $\bar{a}$. $\bar{A}^s$ sei irgend ein Punkt von $\bar{a}$. Eine Bewegung, die $\bar{U}$ nach U, $\bar{A}^s$ nach A^s bringt, führt dann $\bar{U}\,\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ in eine mögliche Lage $U\,A\,B\,C$ über, $\bar{\varepsilon}$ in die zugehörige Sehebene ε durch A. — $\bar{a}$ hat einen reellen Radius $\geqq 0$, wenn (3) erfüllt ist. Dann und nur dann ergeben sich reelle Dreibeine $U\,A\,B\,C$. Jedes erhaltene Dreibein $U\,A\,B\,C$ kann man in jeder Richtung, die den Sehebenen angehört, beliebig verschieben; außerdem kann man $U\,A\,B\,C$ beliebigen Drehungen um Π unterwerfen.

II. Projektionen mit dim Z + dim Π > n—1.

Es sei $\dim Z = n_Z$, $\dim \Pi = n_\Pi$ und $n_Z + n_\Pi - (n-1) = \nu > 0$. Der Raumpunkt P liege nicht auf Z; sein Bild P' ist Schnitt des Verbindungsraumes $[ZP]$ mit Π. P' hat die Dimension $n_Z + 1 + n_\Pi - n = \nu > 0$. P' ist also nicht ein Punkt, sondern ein ν-dimensionaler Teilraum von Π. Natürlich wird man voraussetzen, daß P' nicht ganz Π sei, also muß $n_\Pi > \nu$ und $n_Z < n-1$ sein. Z und Π schneiden sich in einem linearen Teilraum $(Z\Pi)$ von der Dimension $n_Z + n_\Pi - n = \nu - 1$. Alle P' gehen durch $(Z\Pi)$. Wird P' als ν-dimensionaler, $(Z\Pi)$ enthal-

tender Teilraum angenommen, so liegt P irgendwo im Verbindungsraum $[ZP']$.

Man könnte von hier aus zu einer Abbildung der Raumpunkte P auf Punkte in Π kommen, indem man P' mit einem fest angenommenen $(n_\Pi - \nu)$-dimensionalen Teilraum von Π schneidet. Besser aber wird man P aus mehreren Zentren Z auf einen und denselben Bildraum Π projizieren und die Dimensionen der Zentren so wählen, daß sich die Bilder in Π in einem Punkt schneiden. *Beispiele*:

a) *Netzriß im* R_3. $n = 3$, $n_Z = 1$, $n_\Pi = 2$, $\nu = 1$, Projektion des R_3 aus einer Geraden Z auf eine Ebene Π. Z schneide Π in D. Alle Geraden P' gehen durch D. Zwei solche Projektionen auf Π, wobei die Geraden Z_1 und Z_2 windschief sind und Π in D_1 bzw. D_2 schneiden, ergeben die Bildgeraden P' (durch D_1) und P'' (durch D_2). Der Schnittpunkt (P) von P' und P'' heißt Netzriß von P. Ausnahmen treten ein, wenn P auf Z_1 oder Z_2 oder auf $[D_1 D_2]$ liegt. Während die Abbildung von P auf P' und P'' linear ist, ist die von P auf (P) nicht mehr linear; durchläuft P eine Gerade g, so durchläuft (P) einen Kegelschnitt (g) durch D_1 und D_2.

b) *Doppelter Netzriß im* R_3. Ist ein Netzriß (P) von P gegeben, so liegt P irgendwo auf der Treffgeraden aus (P) an Z_1 und Z_2. Durch zwei Netzrisse (P) (Zentren Z_1, Z_2) und $((P))$ (Zentren Z_3, Z_4) von P auf Π läßt sich P i. a. eindeutig festlegen. Natürlich sind (P), $((P))$ nicht unabhängig.

Konstruktiv einfach ist der Sonderfall, wo Π von Z_1 und Z_3 im selben Punkt D_1, von Z_2 und Z_4 im selben Punkt D_2 geschnitten wird und wo Z_1 und Z_4 sich in einem Punkt E_1, Z_2 und Z_3 sich in einem Punkt E_2 schneiden. Es existiert dann ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung mit dem Erzeugendenvierseit Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Durch einen Raumpunkt P allgemeiner Lage geht eine Fläche φ des Büschels; sie enthält die Treffgeraden aus P an Z_1 und Z_2 und an Z_3 und Z_4. Daher liegen (P) und $((P))$ auf dem Schnitt p von φ mit Π. p ist „Ordner" von P. Die Kegelschnitte p bilden ein Büschel, sie gehen durch die Schnittpunkte von Π mit Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

D_1 und D_2 seien die absoluten Kreispunkte von Π; E_1 und E_2 seien symmetrisch zu Π gelegen und konjugiert komplex; dann sind Z_1 und Z_2, ebenso Z_3 und Z_4 konjugiert komplex. Deutet man dann eine nullteilige Fläche 2. Ordnung durch Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 als absolute Fläche einer elliptischen Metrik im Raum, so sind die übrigen Flächen φ *Cliffords*che Flächen und die Abbildung gestattet eine einfache konstruktive Be-

handlung der elliptischen Schraubungen mit den Achsen $[D_1 D_2]$ und $[E_1 E_2]$.[5]

III. Projektionen mit dim Z + dim Π < n—1.

Es sei $\dim Z = n_Z$, $\dim \Pi = n_\Pi$ und $n_Z + n_\Pi - (n-1) = -\nu$, wobei $\nu > 0$. R_k sei ein k-dimensionaler Teilraum des R_n; die Dimension seines Verbindungsraumes mit Z ist $\dim [ZR_k] \leqq n_Z + k + 1$, je nachdem Z und R_k Punkte gemein haben oder nicht. Im Schnitt von $[ZR_k]$ mit Π ergibt sich R_k' mit

$$\dim R_k' = \dim [ZR_k] + n_\Pi - n \leqq n_Z + n_\Pi - n + 1 + k = k - \nu.$$

Damit $\dim R_k' \geqq 0$ sei, muß $k \geqq \nu$ sein. Ein zu Z punktfremder R_ν besitzt also einen Bildpunkt R_ν'. Die Abbildung eignet sich weniger zur Darstellung der Punkte des R_n, wohl aber zur Darstellung der R_ν des R_n. — Der Verbindungsraum $[Z\Pi]$ von Z und Π hat die Dimension $n_Z + n_\Pi + 1 = n - \nu$. Innerhalb $[Z\Pi]$ ist die Projektion wegen $n_Z + n_\Pi = (n-\nu) - 1$ eine Projektion im Sinne von I. — Durch R_k' ist R_k im R_n natürlich nicht bestimmt; um R_k zu bestimmen, muß man mehrere solche Projektionen verwenden. *Beispiele*:

a) Projektion im R_3 aus einem Punkt Z auf eine Gerade Π, $\nu = 1$. Eine Gerade R_1 des R_3, die nicht in der Ebene $[Z\Pi]$ liegt, bildet sich auf den Schnittpunkt R_1' der Ebene $[ZR_1]$ mit Π ab. Ist umgekehrt R_1' auf Π gegeben, so kann R_1 jede Gerade sein, die $[ZR_1']$ schneidet. Eine Ebene R_2 des R_3, die Z enthält, bildet sich auf den Schnittpunkt R_2' von R_2 mit Π ab. Geht R_2 nicht durch Z, so ist R_2' ganz Π; diesen Nachteil besitzt nur die einzelne Projektion, Systeme solcher Projektionen gestatten jedoch eine Ebene eindeutig festzulegen.

b) Vier Projektionen im R_3 aus Punkten Z_i auf Geraden Π_i ($i = 1,2,3,4$). Eine Gerade R_1 des R_3, die in keiner Ebene $[Z_i \Pi_i]$ liegt, hat die Bildpunkte R_1', R_1'', R_1''', R_1''''. Sind umgekehrt die Bildpunkte gegeben, so ist R_1 eine Treffgerade der Geraden $[Z_1 R_1']$, $[Z_2 R_1'']$, $[Z_3 R_1''']$, $[Z_4 R_1'''']$. Es gibt i. a. zwei solche Treffgeraden R_1; sie entsprechen einander in einer involutorischen Strahlverwandtschaft im Raum.

Um R_1 durch R_1', R_1'', R_1''', R_1'''' i. a. eindeutig festzulegen, kann man z. B. alle Π_i in eine Gerade Π zusammenfallen lassen. Dann ist Π selbst schon eine der Treffgeraden von $[Z_i R_1^{(i)}]$; die andere ist R_1. Auf die weitere

---

[5] *F. Hohenberg*, Parallelprojektionen in nichteuklidischen Räumen, Mon. f. Math. u. Phys. 42 (1935), 425—437.

Untersuchung sei nicht eingegangen; es sei nur erwähnt, daß Strahlbündel (Punkte), Strahlfelder (Ebenen) und andere Strahlmannigfaltigkeiten durch trilineare Beziehungen zwischen den Bildpunkten ihrer Strahlen gekennzeichnet sind, und daß die Strahlen R_1, deren Bildpunkte ein festes Doppelverhältnis bestimmen, einen quadratischen Strahlkomplex bilden, dem auch die Bündel Z_i angehören. — Vereinfachungen treten ein, wenn die Z_i in einer Ebene liegen, die nicht Π enthält.

c) Projektion des Strahlraums aus zwei Punkten auf zwei Strahlnetze. Wir betrachten nun jenen Sonderfall von b), bei dem $Z_1 = Z_2$ und $Z_3 = Z_4$ ist, während die Geraden Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 zunächst allgemeine Lage besitzen sollen. Eine Gerade R_1 hat vier Bildpunkte; umgekehrt ist R_1 durch ihre Bildpunkte i. a. eindeutig bestimmt, nämlich als Schnittgerade der Ebenen $[Z_1 = Z_2, R_1', R_1'']$ und $[Z_3 = Z_4, R_1''', R_1'''']$; nur wenn diese Ebenen zusammenfallen, d. h. wenn R_1 die Gerade $z = [Z_1 = Z_2, Z_3 = Z_4]$ schneidet, ist R_1 durch ihre Bildpunkte nicht bestimmt. Die Gerade $[R_1' R_1'']$ kann man als Projektion von R_1 aus $Z_1 = Z_2$ auf das Strahlnetz mit den Brennlinien Π_1 und Π_2 auffassen, analog die Gerade $[R_1''' R_1'''']$ als Projektion von R_1 aus $Z_3 = Z_4$ auf das Strahlnetz mit den Brennlinien Π_3 und Π_4.

Diese Abbildung umfaßt als Sonderfälle a) das Zweibildersystem des R_3, und *b*) das Zweispurensystem des R_3. Zu a): Liegen Π_1 und Π_2 in einer Ebene Π_{12} und liegen Π_3 und Π_4 in einer Ebene Π_{34}, so ist die Gerade $[R_1' R_1'']$ die Projektion von R_1 aus $Z_1 = Z_2$ auf Π_{12}, ebenso $[R_1''' R_1'''']$ die Projektion von R_1 aus $Z_3 = Z_4$ auf Π_{34}. Zu b): Ist ein Zweispurensystem mit den Spurebenen Σ_1 und Σ_2 gegeben, so nehme man die Geraden Π_1 und Π_3 in Σ_1, Π_2 und Π_4 in Σ_2 an und wähle zwei Punkte $Z_1 = Z_2$ und $Z_3 = Z_4$ auf der Schnittgeraden von Σ_1 und Σ_2. Dann schneiden sich die Geraden $[Z_1 R_1']$ und $[Z_3 R_1''']$ im ersten Spurpunkt, die Geraden $[Z_2 R_1'']$ und $[Z_4 R_1'''']$ im zweiten Spurpunkt von R_1. Umgekehrt sind R_1', R_1'', R_1''', R_1'''' durch die Spurpunkte in Σ_1 und Σ_2 bestimmt. Man könnte auch etwas allgemeiner zwei Punkte Z_1 und Z_3 irgendwo in Σ_1, Z_2 und Z_4 irgendwo in Σ_2 annehmen. — Analoge Überlegungen für Räume höherer Dimensionen führen zu Abbildungen, die die in I. erwähnten Abbildungen des R_n als Sonderfälle umfassen.

d) *Spurensysteme.* Wir lassen formal zu, daß Z die leere Menge Λ mit $\dim \Lambda = -1$ sei; für jeden linearen Teilraum R des R_n ist dann $[ZR] = R$ und als Projektion von R aus Z auf Π ergibt sich der Schnitt von R mit Π. Im R_2 ist nur der Fall von Bedeutung, daß zwei Geraden

Π_1 und Π_2 verwendet werden; die Schnittpunkte einer Geraden R_1 mit Π_1 und Π_2 kennzeichnen (nach Wahl des Einheitspunktes) die *Linienkoordinaten* von R_1. Im R_3 seien folgende Fälle erwähnt: *a*) Π_1 und Π_2 sind zwei Ebenen (*gewöhnliches Zweispurensystem*). *b*) Π_1, Π_2, Π_3 sind drei Geraden. Eine Ebene R_2 des R_3 ist i. a. durch ihre Schnittpunkte R_2', R_2'', R_2''' mit Π_i gekennzeichnet; nur wenn R_2 eine Tangentialebene der Fläche 2. Ordnung mit den Leitgeraden Π_1, Π_2, Π_3 ist, ist R_2 durch ihre Bilder nicht bestimmt. Eine Raumgerade bildet sich (als Träger eines Ebenenbüschels) auf drei projektive Punktreihen auf Π_1, Π_2, Π_3 ab, ein Raumpunkt (als Träger eines Ebenenbündels) ergibt eine trilineare Beziehung zwischen Π_1, Π_2, Π_3. — Die Annahme, daß Π_1, Π_2, Π_3 allgemeine Lage haben und eine Regelschar bestimmen, ist in sich dual und man könnte einen Raumpunkt auch durch seine Verbindungsebenen mit Π_i kennzeichnen. Nicht mehr in sich dual ist die Annahme, daß Π_1, Π_2, Π_3 einander in einem Punkt schneiden; dann lassen sich (nach Wahl eines Einheitspunktes) durch R_2', R_2'', R_2''' die *Ebenenkoordinaten* von R_2 festlegen.

Die Kontinua (V^n) — eine Verschärfung der Cantorschen Mannigfaltigkeiten

Von

Paul Alexandroff, Moskau

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 21. September 1956)

Als *Cantorsche Mannigfaltigkeiten* — wir sagen statt dessen „*Kontinua* (**U**)" — hat *Urysohn* [1]* diejenigen Kontinua hervorgehoben, die als besonders stark zusammenhängend betrachtet werden können: ein n-dimensionales Kompaktum C ist eine (n-dimensionale) Cantorsche Mannigfaltigkeit, falls bei jeder Wahl des höchstens $(n-2)$-dimensionalen Teilkompaktums B die offene Menge $C - B$ zusammenhängend ist.

Urysohn glaubte, mit diesem Begriff die richtige Wahl derjenigen Gebilde getroffen zu haben, die — im Falle $n = 2$ — als möglichst allgemeine Flächen, für ein beliebiges n aber als so etwas wie n-dimensionale „Körper" betrachtet werden könnten. Er ließ sich dabei durch die folgenden Vermutungen leiten:

A. Jedes Kompaktum, das die gemeinsame Begrenzung von zwei oder mehreren Gebieten im R^n bildet, ist ein Kontinuum (**U**);

B. Jedes n-dimensionale Kompaktum enthält ein n-dimensionales Kontinuum (**U**).

Die Vermutung **A** wurde von *Urysohn* selbst nur für den Fall $n = 3$ bewiesen (für $n = 2$ bildet sie den Inhalt des längst bekannten *Phragmén-Brouwer*schen Satzes). Den ersten Beweis dieser Vermutung für ein beliebiges n wurde 1932 in meiner Arbeit [2] erbracht. Was die Urysohnsche Vermutung **B** betrifft, so wurde sie ungefähr gleichzeitig und unabhängig voneinander von *W. Hurewicz* und *L. Tumarkin* 1928 bewiesen; den Beweis eines schärferen Satzes habe ich später im Rahmen der allgemeinen homologischen Dimensionstheorie ebenfalls in [2] gegeben.

---

* Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf die Literaturangaben am Ende der Arbeit.

Es ist klar, daß wenn man eine Klasse von Kontinuen unter der Geltung der Urysohnschen Bedingungen **A** und **B** auszeichnen will, man nicht erwarten darf, daß diese Kontinua — insbesondere was ihre lokalen Eigenschaften betrifft — eine nennungswerte Ähnlichkeit mit den gewöhnlichen Mannigfaltigkeiten aufweisen werden. Und dennoch ist — unter Geltung der *Urysohn*schen Bedingungen — eine gewisse Einschränkung des ursprünglichen Begriffes der Cantorschen Mannigfaltigkeit erwünscht, und — wie die nachfolgenden Ausführungen zeigen sollen — auch wirklich möglich.

Daß eine solche Einschränkung erwünscht sein dürfte, zeigt das Beispiel der Abb. 1: wir sehen auf ihr eine Cantorsche Fläche C (ein zweidimensionales Kontinuum (**U**)) von der folgenden Beschaffenheit: das

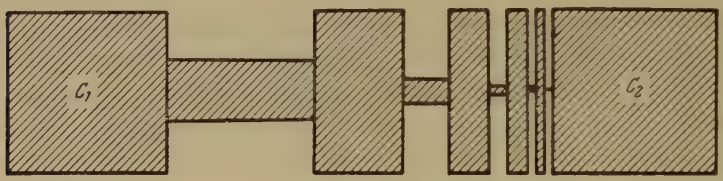

Abb. 1

Kontinuum C enthält zwei disjunkte Quadrate C_1 und C_2, die voneinander durch Mengen von einem beliebig kleinen Durchmesser getrennt werden können. Unter diesen Umständen wird man wohl kaum sagen können, daß die Fläche C besonders „gut zusammenhängt" — man wird auf ihr aus dem Bereich C_1 nach dem Bereich C_2 zwar mit einem Rad, aber leider nicht mit einem Wagen gelangen können. Durch eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Beispiels erhält man bei beliebigem n eine solche n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit, auf der es zwei disjunkte Teilkompakta C_1 und C_2 gibt, von denen jedes in Bezug auf C innere Punkte enthält und die mittels einer $(n-1)$-dimensionalen Menge von einem beliebig kleinen Durchmesser voneinander getrennt werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird unter dem Namen der Kontinuen (**V**) eine Klasse von Kontinuen definiert, die enger ist, als die Klasse der Cantorschen Mannigfaltigkeiten und dennoch die beiden Urysohnschen Bedingungen **A** und **B** erfüllt. Ein Kontinuum (**V**) „hängt besser zusammen" als dies für die gewöhnlichen Cantorschen Mannigfaltigkeiten der Fall ist: die Erscheinungen, die etwa durch das Beispiel

von Abb. 1 veranschaulicht werden, können bei den Kontinuen (V) nicht auftreten.

§ 1. Vorbemerkungen

Zur Definition der Kontinua (V) brauchen wir den Begriff der sogenannten *Urysohn*schen Konstanten, die ich (in Anschluß an *Urysohn*) in meiner Arbeit [3] untersucht habe. Ist C ein Kompaktum und r eine nichtnegative ganze Zahl so bezeichnen wir mit $\alpha^r C$ die untere Grenze derjenigen $\varepsilon > 0$ zu denen es eine ε-Abbildung[1] von C in ein Kompaktum (oder, was auf dasselbe hinauskommt, in ein Polyeder) von einer Dimension $\leq r$ gibt. Ist das Kompaktum C als eine Punktmenge in einem euklidischen oder in dem Hilbertschen Raume gegeben, so läßt sich neben der Zahl $\alpha^r C$ noch eine Zahl α'^r definieren — die untere Grenze derjenigen $\varepsilon > 0$, für die es ε-Verschiebungen[2] von C in ein Kompaktum von einer Dimension $\leq r$ gibt. Schließlich bezeichnet man mit $u^r C$ die untere Grenze derjenigen $\varepsilon > 0$, für die das Kompaktum C offene ε-Überdeckungen von der Ordnung $r+1$ besitzt. Die Zahlen $\alpha^r C$, $\alpha'^r C$, $u^r C$ sind zwar im allgemeinen voneinander verschieden, trotzdem sind sie aber für unsere weiteren Zwecke gleichbedeutend, denn es kommt uns nicht auf den genauen Wert dieser Zahlen, sondern ausschließlich darauf an, ob es in der einen oder anderen Klasse von Kompakten solche Kompakta gibt, für welche diese Zahlen einen beliebig kleinen Wert annehmen; trifft dies für eine der Zahlen $\alpha^r C$, $\alpha'^r C$, $u^r C$ zu, so, wie leicht ersichtlich, auch für die übrigen beiden. Aus Bequemlichkeitsgründen setzt man noch für ein nichtleeres Kompaktum C

$$\alpha^{-1} C = \alpha'^{-1} C = u^{-1} C = 1,$$

für das leere dagegen

$$\alpha^{-1} C = \alpha'^{-1} C = u^{-1} C = 0.$$

§ 2. Die Kontinua (V)

Wir beginnen mit einer leichten Abänderung der ursprünglichen Urysohnschen Definition der Cantorschen Mannigfaltigkeiten und sagen, daß ein Kompaktum C ein Kontinuum (U) ist, falls es der folgenden Bedingung genügt:

[1] Eine Abbildung f eines Kompaktums X in eine Menge Y heißt eine ε-Abbildung, falls der Durchmesser des Urbildes $f^{-1} y$ eines jeden Punktes y von Y kleiner als ε ist.

[2] Eine ε-Verschiebung einer Punktmenge C des metrischen Raumes R ist eine solche stetige Abbildung f von C in diesen Raum R bei der $\varrho(x, fx) < \varepsilon$ für jeden Punkt $x \in R$ ist.

Bedingung ($\mathbf{U}^p$). Es seien C_1, C_2 disjunkte Teilkompakta von C, von denen jedes innere Punkte (in Bezug auf C) enthält; dann soll jedes Kompaktum $B \subset C - (C_1 \cup C_2)$, welches C_1 von C_2 trennt[3], mindestens $(p-1)$-dimensional sein oder, was dasselbe ist, es soll für jedes solche B die Ungleichung

$$\alpha^{p-2} B > 0$$

gelten (wobei man, gemäß dem oben Gesagten, α^{p-2} durch α'^{p-2} oder auch durch u^{p-2} ersetzen kann).

Wie leicht ersichtlich, sind die p-dimensionalen Kontinua ($\mathbf{U}^p$) mit den p-dimensionalen Cantorschen Mannigfaltigkeiten identisch.

Wir kommen jetzt zu unserer Hauptdefinition: *ein Kompaktum C heißt ein Kontinuum* ($\mathbf{V}^p$), *falls es die folgende Bedingung erfüllt*:

Bedingung ($\mathbf{V}^p$). Es seien C_1, C_2 zwei beliebige disjunkte Teilkompakta von C, von denen jedes innere Punkte in Bezug auf C enthält. Dann soll eine solche positive Zahl σ existieren, daß für jedes Kompaktum $B \subset C - (C_1 \cup C_2)$, welches C_1 von C_2 trennt, die Ungleichung

$$\alpha^{p-2} B > \sigma$$

gilt.

Auch hier darf man natürlich α^{p-2} durch α'^{p-2} oder auch durch u^{p-2} ersetzen. Offenbar ist bei jedem $p' < p$ ein Kontinuum ($\mathbf{V}^p$) erst recht ein ($\mathbf{V}^{p'}$).

Ein p-dimensionales Kontinuum ($\mathbf{V}^p$) *soll schlechthin ein p-dimensionales Kontinuum* ($\mathbf{V}$) *heißen.* Jedes Kontinuum ($\mathbf{V}$) ist offenbar ein Kontinuum ($\mathbf{U}$); wie das Beispiel der Abb. 1 zeigt, gibt es Kontinua ($\mathbf{U}$), die keine Kontinua ($\mathbf{V}$) sind.

Invarianzsatz. *Die Kontinua* ($\mathbf{V}^p$) — *bei jedem p* —, *folglich auch die Kontinua* $\mathbf{V}$, *bilden eine topologisch invariante Klasse von Kontinuen.*

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß die Bedingung ($\mathbf{V}^p$) der folgenden topologisch invarianten Bedingung ($\mathfrak{B}^p$) äquivalent ist:

Bedingung ($\mathfrak{B}^p$). Es seien C_1 und C_2 disjunkte Teilkompakta des Kompaktums C, die innere Punkte (in Bezug auf C) enthalten und sonst beliebig sind. Dann gibt es eine solche (offene) Überdeckung ω von C, daß kein Kompaktum $B \subset C - (C_1 \cup C_2)$, welches C_1 und C_2 von-

[3] Man sagt, daß die abgeschlossene Menge $B \subset C$ die disjunkten Punktmengen $C_1 \subset C$ und $C \subset C'$ voneinander trennt, wenn $C - B = A \cup D$ ist, wobei die Mengen A und D disjunkt, in C offen sind und die Mengen C_1 und C_2 respektive enthalten.

einander trennt, mittels einer ω-Abbildung[4] in ein Kompaktum von einer Dimension $\leq p - 2$ abgebildet werden kann.

Der Beweis der Äquivalenz der Bedingungen ($\mathbf{V}^p$) und ($\mathfrak{B}^p$) besteht aus wenigen sich zwangsmäßig darbietenden Schlüssen und darf dem Leser überlassen werden.

§ 3. Die Hauptsätze

In diesem Paragraphen beweisen wir die folgenden Sätze:

Satz I. *Jede kompakte* (geschlossene oder berandete) *Mannigfaltigkeit* (im klassischen Sinne) *ist ein Kontinuum* (V).

Satz II_0. *Jedes Kompaktum $C \subset R^n$, welches die gemeinsame Begrenzung von zwei oder mehreren Gebieten des R^n bildet, ist ein* ($(n-1)$-*dimensionales*) *Kontinuum* (V).

Diese beiden Sätze sind in einem Satz enthalten, dessen Formulierung eine (allerdings, längst bekannte) Definition erfordert. Wir sagen, *das Kompaktum $C \subset R^n$ sei* (in diesem R^n) *mit dem Zyklus z verschlungen*, falls der Zyklus z in $R^n - C$ liegt und dort nicht berandet, während er bei jeder Wahl des echten Teilkompaktums $C' \subset C$ in $R^n - C'$ berandet. Des weiteren heißt *C mit z in der* (*offenen*) *Kugel $U^n \subset R^n$ verschlungen*, falls der Zyklus z in $U^n - C$ liegt und dort nicht berandet, wohl aber z in $U^n - C'$ berandet, wenn nur das Teilkompaktum $C' \subset C$ so beschaffen ist, daß $U^n \cap C'$ echte Teilmenge von $U^n \cap C$ ist.

Wir formulieren jetzt die folgenden Sätze:

Satz II. *Jedes Kompaktum $C \subset R^n$, welches mit einem Zyklus z* (*einer beliebigen Dimensionszahl q*) *— sei es auch nur in einer Kugel U^n — verschlungen ist, ist ein Kontinuum* ($\mathbf{V}^p$) *mit $p = n - q - 1$.*

Dieser Satz enthält, wie leicht ersichtlich, die beiden Sätze I und II_0; da aber, wie ich in [2] bewiesen habe, jedes p-dimensionale Kompaktum $C \subset R^n$ ein Teilkompaktum enthält, welches mit einem Zyklus z^q der Dimensionszahl $q = n - p - 1$ in einer gewissen Kugel U^n verschlungen ist, folgt aus dem Satz II auch der

Satz III. *Jedes p-dimensionale Kompaktum enthält ein p-dimensionales Kontinuum* (V).

Wir brauchen also nur den Satz II zu beweisen.

Beweis des Satzes II. Das Kompaktum $C \subset R^n$ sei in der Kugel U^n verschlungen mit dem Zyklus z^q; wir beweisen, daß C ein Konti-

[4] Ist ω eine Überdeckung des Kompaktums X, so heißt eine (stetige) Abbildung f von X in einen Raum Y eine ω-Abbildung, falls das Urbild $f^{-1}y$ eines jeden Punktes von $y \in Y$ in (mindestens) einem Element von ω enthalten ist.

nuum (V^p), $p=n-q-1$, ist. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es in C zwei zueinander fremde Teilkompakta C_1 und C_2, von denen jedes innere Punkte enthält, und die bei jedem $\varepsilon > 0$ durch ein Kompaktum $B_{(\varepsilon)}$ mit

$$\alpha'^{p-2} B_{(\varepsilon)} < \varepsilon$$

getrennt werden können. Wir wählen eine abnehmende Folge positiver Zahlen $\varepsilon_k \to 0$ und bezeichnen die entsprechenden B_{ε_k} einfach mit B_k. Dann hat man für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ eine Zerlegung

$$C = A_k \cup B_k \cup D_k,\ C_1 \subseteq A_k,\ C_2 \subseteq D_k$$

in drei paarweise disjunkte Mengen, von denen A_k und D_k offen sind. Es gilt (indem wir hier und überall weiter die abgeschlossenen Hüllen mit eckigen Klammer bezeichnen):

$$[A_k] \cap [D_k] \subseteq B_k$$

Man wähle in C_1, C_2 je einen inneren Punkt c_1 bzw. c_2 und so kleine Umgebungen U_1 bzw. U_2 dieser Punkte, daß

$$\varrho(U_i, (C - C_i)),\ i = 1, 2$$

einen positiven Wert haben.

Nach Voraussetzung ist C mit dem Zyklus z^q verschlungen. Folglich gibt es durch z^q berandete Ketten: x_1 in $U^n - (C - U_1)$ und x_2 in $U^n - (C - U_2)$. Indem wir mit $\bar{x}$ den Träger der Kette x (d. h. die Vereinigungsmenge der (abgeschlossenen) Simplexe, die in dieser Kette mit von Null verschiedenen Koeffizienten auftreten) bezeichnen, bemerken wir, daß der Durchschnitt $\bar{x}_i \cap C$ in U_i, $i = 1, 2$, liegt, und folglich von $C - U_i$ einen positiven Abstand hat. Folglich läßt sich eine positive Zahl σ wählen, die kleiner als $\varrho(U_1, C - C_1)$, als $\varrho(U_2, C - C_2)$ und als

$$\varrho(\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2,\ C - (U_1 \cup U_2))$$

ist.

Bei jedem k ist

$$B_k \subseteq C - (C_1 \cup C_2) \subseteq C - (U_1 \cup U_2),$$

so daß

$$\varrho(B_k, \bar{x}_1 \cup x_2) > \sigma$$

ist.

Folglich ist der Zyklus $z^{q+1} = x_1 - x_2$ mehr als um σ von B_k entfernt.

Die Kette x_1 liegt außerhalb von D_k, und ebenso liegt x_2 außerhalb von A_k. Da $[A_k] \cap [D_k] \subseteq B_k$ ist, so berandet der Zyklus $z^{q+1} = x_1 - x_2$

nach dem bekannten Lemma von *Alexander* in $U^n - B_k$ nicht. Es sei jetzt k so groß, daß $\varepsilon_k < \sigma$ ausfällt. Wir bezeichnen mit P_k das höchstens $(q-2)$-dimensionale Polyeder, in welches das Kompaktum B_k sich mittels einer ε_k-Verschiebung überführen läßt. Da während dieser Überführung die Menge B_k eine positive Entfernung von dem Zyklus z^{q+1} behält, so kann z^{q+1} in $U^n - P_k$ nicht beranden. Das widerspricht aber der Tatsache, daß die Dimension von P_k höchstens $p-2$, und

$$(p-2)+(q+1)=n-2$$

ist. Durch diesen Widerspruch ist alles bewiesen.

§ 4. Zusätzliche Bemerkungen und ungelöste Fragen

Es entsteht in natürlicher Weise die Frage, ob man bei der Formulierung der Bedingung (V^p) die Forderung, die Teilkompakta C_1, C_2 enthalten innere Punkte, nicht fallen lassen könnte. Dadurch käme man zu einer Klasse von Kontinuen — wir nennen sie Kontinua (V′) — die enger ist, als die der Kontinuen (V). In genauer Formulierung heißt ein homogen - p-dimensionales Kompaktum C ein Kontinuum (V′), falls es zu je zwei disjunkten p-dimensionalen Teilkompakten C_1 und C_2 von C ein solches positives σ gibt, daß für jedes Kompaktum

$$B \subseteq C - (C_1 \cup C_2),$$

welches C_1 und C_2 voneinander trennt, die Ungleichung

$$\alpha^{p-2} B > \sigma$$

gilt.

Offenbar ist jedes Kontinuum (V′) ein Kontinuum (V), und jede kompakte Mannigfaltigkeit ein Kontinuum (V′). Die Frage, ob jedes endlichdimensionale Kompaktum ein gleichdimensionales Kontinuum (V′) enthält, bleibt offen und scheint nicht leicht zu beantworten zu sein. Jedenfalls läßt sich aber eine geschlossene Fläche im R^3 (d. h. ein Kompaktum $C \subset R^3$, welches den Raum in zwei Gebiete zerlegt und die gemeinsame Begrenzung derselben bildet) konstruieren, welche kein Kontinuum (V′) ist.

Zu diesem Zweck nehme man in der Koordinatenebene R^2 eine Linie vom Typus einer $\sin\frac{1}{x}$-Kurve (für etwa $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$), die sich von der eigentlichen $\sin\frac{1}{x}$-Kurve im wesentlichen nur dadurch unterscheidet, daß ihre Grenzstrecke nicht die Strecke $-1 \leq y \leq 1$ der y-Achse,

sondern eine aus dem Koordinaten-Ursprung in die obere Halbebene in schräger Richtung weisende Strecke ist (Abb. 2).

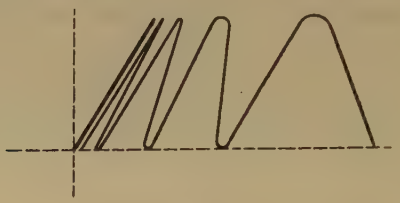

Abb. 2

Sodann lasse man diese Kurve um die y-Achse rotieren und ergänze die so entstandene Rotationsfläche etwa durch eine Halbkugelfläche zu einer geschlossenen Fläche C (Abb. 3). Die bei der Rotation von der

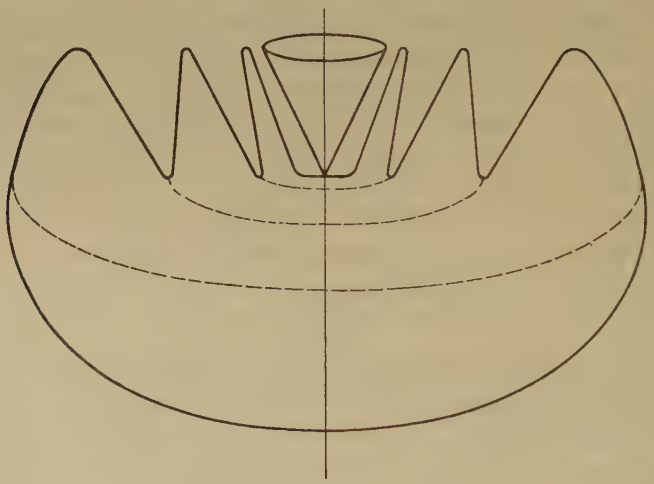

Abb. 3

Grenzstrecke erzeugte (beschränkte) Kegelfläche ist ein Teilkontinuum $C_1 \subset C$, welches beliebig enge Umgebungen besitzt, deren Begrenzungen Kreislinien von einem beliebig kleinen Durchmesser sind. Die geschlossene Fläche C ist also sicher kein Kontinuum (V').

Aus einem tiefliegenden Satz von *K. Sitnikov* [4] folgt, daß jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit C die folgende Bedingung erfüllt:

Bedingung (W). Es sei C_1 ein beliebiges echtes Teilkompaktum von C, $\dim C_1 = p$. Dann existiert ein solches $\sigma > 0$, daß die Begrenzung

B jeder hinreichend engen Umgebung von C_1 (in Bezug auf C) im Falle $p = n$ der Ungleichung $\alpha^{p-2} B > \sigma$, im Falle $p < n$ sogar der Ungleichung

$$\alpha^{p-1} B > \sigma$$

genügt.

Ein Kontinuum, welches dieser Bedingung genügt, nennen wir für einen Augenblick „*Kontinuum* (W)". Es wäre interessant, ein solches n-dimensionales Kompaktum zu konstruieren, welches kein n-dimensionales Kontinuum (W) enthält, oder zu zeigen (was mir übrigens recht aussichtslos scheint), daß es ein solches Kompaktum nicht gibt.

Man könnte auch an eine „gleichmäßige Bedingung" (W) denken: man erhält diese, wenn man verlangt, daß das σ in der Bedingung (W) nicht von den einzelnen C_1, sondern nur von $\alpha^{p-1} C$ abhängt. Es soll somit (für das gegebene n-dimensionale Kompaktum C) ein solches $\sigma_0 = \sigma_0(C) > 0$ existieren, daß es zu jedem positiven $\sigma < \sigma_0$ ein δ gibt derart, daß für alle $C_1 \subset C$, $\dim C_1 = p$, $\alpha^{p-1} C_1 > \delta$, die Begrenzung B jeder hinreichend engen Umgebung von C_1 die Ungleichung $\alpha^{p-2} B > \sigma$ bzw. $\alpha^{p-1} B > \sigma$ erfüllt. Man kann leicht Beispiele von (sogar zweidimensionalen) Kontinuen konstruieren, die der Bedingung (W), aber nicht der gleichmäßigen Bedingung (W) genügen.

Zum Schluß sei noch auf folgende Aufgabe hingewiesen:

Unter welchen Bedingungen ist die Vereinigungsmenge zweier n-dimensionaler Kontinuen (V) *wieder ein Kontinuum* (V)?

Bekanntlich ist die Vereinigungsmenge zweier n-dimensionaler Kontinuen (U) dann und nur dann ein Kontinuum (U), falls der Durchschnitt der beiden Summanden mindestens $(n-1)$-dimensional ist. Ein solcher Satz gilt für die Kontinua (V) nicht. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man die geschlossene Fläche C auf Abb. 3; sie ist ein zweidimensionales Kontinuum (V). Als zweites Kontinuum (V) nehme man das durch irgend zwei Erzeugende der Kegelfläche $C_1 \subset C$ bestimmte gleichschenkelige Dreieck C'. Die Vereinigungsmenge $C \cup C'$ ist dann kein Kontinuum (V).

Wenn man unter einem Kondensationsteil eines homogen-n-dimensionalen Kompaktums C jedes Teilkompaktum C_0 versteht, welches in einem in C nirgendsdichten homogen-n-dimensionalen Teilkompaktum enthalten ist, so liegt die Vermutung nahe, daß die Vereinigungsmenge $C \cup C'$ zweier n-dimensionaler Kontinuen (V) immer dann ein Kontinuum (V) ist, wenn der Durchschnitt $C \cap C'$ keinen Kondensationsteil (weder von C noch von C') enthält.

Literatur

[1] *P. Urysohn*, Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, Fund. Math., **7**, **8**, 1925—1926.

[2] *P. Alexandroff*, Dimensionstheorie, Math. Ann. **106**, 1932.

[3] *P. Alexandroff*, Über die Urysohnschen Konstanten, Fund. Math. **20**, 1933.

[4] *K. Sitnikov*, Doklady der Akademie d. Wiss. d. UdSSR, 1949.

Buchbesprechungen

Gesammelte Mathematische Schriften von Constantin Carathéodory. Band IV. Herausgegeben im Auftrage der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mit 1 Bildtafel, IX, 494 S. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung. 1956. DM 43.—, geb. DM 48.—.

Der vorliegende vierte Band der Schriften *Carathéodorys* enthält die noch ausstehenden zwölf Arbeiten zur Theorie der analytischen Funktionen, darunter die Untersuchungen über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, sowie über analytische Funktionen von mehreren Variablen; dazu kommen zwölf weitere Arbeiten zur Theorie der reellen Funktionen. Unter letzteren befindet sich die Abhandlung über das lineare Maß aus dem Jahre 1914 mit der inzwischen klassisch gewordenen Theorie der äußeren Maße, ferner die Arbeiten des Autors aus den letzten Jahren seines Schaffens. Diese sind der Algebraisierung von Maß und Integral gewidmet und bilden die Grundlage des eben im *Birkhäuser*-Verlag über den Gegenstand erschienenen Buches.

Wegen der Vielseitigkeit und Allgemeinheit der Probleme, die *Carathéodory* in seinen Publikationen behandelt, sowie der fertigen Methoden kommt man als Mathematiker immer wieder in die Lage, die Originalarbeiten zu Rate zu ziehen, weshalb die nun abgeschlossene und durch zahlreiche Hinweise auf die neuere Literatur ergänzte Schriftensammlung als wichtiger Teil einer jeden mathematischen Gelehrtenbibliothek gelten kann. *K. Mayrhofer*, Wien

Ordinal Algebras. Von *A. Tarski*. Mit Anhängen von Chen-Chung Chang und B. Jónsson. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) 133 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1956. hfl. 13.50.

Das vorliegende Buch setzt die vielfältigen Untersuchungen *Tarskis* zur abstrakten Algebra im Birkhoffschen Sinne fort. Ein enger Zusammenhang besteht insbesondere mit der Kardinalalgebra, welche vor mehreren Jahren durch den Verfasser und *Jónsson* eine buchmäßige Darstellung gefunden hat. Für die Ordinalalgebra ist eine endliche und unendliche Addition erklärt sowie eine Operation, die auf die einzelnen Elemente anwendbar ist. Von der Kardinalalgebra unterscheidet sie sich insbesondere dadurch, daß die Addition nicht notwendig kommutativ ist. An Stelle dessen tritt ein etwas anderes Verfeinerungsaxiom: Sei $\sum_{k<\omega} a_k = b + c$ und $c \neq 0$, dann existieren zwei Elemente d, e und eine Ordinalzahl $\mu < \omega$, so daß $\sum_{k<\mu} a_k + d = b$, $a_\mu = d + e$ und $e + \sum_{k<\omega} a_{\mu+1+k} = c$. Eine wesentliche Verallgemeinerung dieses Axioms wird im Laufe der weiteren Untersuchungen (nach *Hanf*) als Satz bewiesen. Die im ersten Kapitel entwickelten arithmetischen Sätze werden im zweiten Kapitel auf die Arithmetik der Relationen angewendet. Das Konzept der Relationsalgebra findet sich im Prinzip wohl schon bei *E. Schröder*. Jedoch hat erst *Tarski* 1941 axiomatische Untersuchungen in dieser Richtung angestellt. Eine

Relation wird als beliebige Menge geordneter Paare erklärt. Bei geeigneter Definition der Ordinalsumme von Relationen und einer Abbildung der Relationen in sich wird die Relationsalgebra zu einer Ordinalalgebra. Es werden wichtige Darstellungssätze bewiesen, die auf Grund eines negativen Satzes von *Lyndon* (nicht jede Relationsalgebra ist einer eigentlichen Relationsalgebra isomorph) an Interesse gewinnen. Im Anhang gibt *Chen-Chung Chang* Ergänzungen zur Ordinalalgebra und *Jónsson* beweist ein allgemeines Theorem über die eindeutige Zerlegbarkeit von Relationen, das 1955 angekündigt wurde.

L. Schmetterer, Wien

Irrational Numbers. Von *I. Niven.* (The Carus Mathematical Monographs: Nr. 11.) XII, 164 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1956. $ 3.—.

Wenn man den Titel liest, so denkt man gleich an das gleichbetitelte Buch von *O. Perron.* Aber die beiden Bücher haben wenig gemeinsam. In dem vorliegenden Werk ist vom Zahlbegriff keine Rede. Es werden vielmehr die Beziehungen zur Zahlentheorie und insbesondere zu den diophantischen Approximationen gebracht. Am Anfang stehen einige mengentheoretische Sätze; dann folgen Beweise der Irrationalität von einzelnen Zahlen und Konstruktionen von Irrationalzahlen. Ausführlich wird die Approximation von Irrationalzahlen durch rationale Zahlen behandelt. Es folgen Transzendenzuntersuchungen (Liouvillesche Zahlen). Ein Kapitel handelt von normalen Zahlen, das sind — roh gesprochen — solche Zahlen, bei deren Dezimalbruchentwicklung alle Ziffern mit gleicher Häufigkeit vorkommen. Ein Kapitel enthält das verallgemeinerte *Lindemann*-Theorem, aus dem die Transzendenz von e, π, $\sin a$, $\cos a$, $\log a$, $\arcsin a$ und vieler weiterer Zahlen folgt (a algebraisch, $\neq 0$, bzw. $\neq 1$). Den Schluß bildet das Theorem von *Gelfond* und *Schneider* über transzendente Zahlen. Die Vorkenntnisse des Lesers können gering sein, abgesehen von einigen Stellen, wo Kenntnisse aus der Algebra oder Funktionentheorie vorausgesetzt werden. Interesse für das Buch ist sicher in weiten Kreisen vorhanden, gibt es doch auf diesem Gebiet noch viele ungelöste Probleme, die jedermann leicht zu erklären sind.

N. Hofreiter, Wien

Matrix Calculus. Von *E. Bodewig.* XII, 334 S. Amsterdam: North Holland Publishing Company. 1956. hfl. 26.50.

Nach Ansicht des Autors sind die Zeilen (a_i) und Spalten (a_k) die Bausteine einer Matrix $(\mathfrak{A})$ und nicht deren Elemente (a_{ik}). Daher führt er eine neue Bezeichnungsweise ein, an die man sich erst gewöhnen muß. Zeilen werden mit $A_{i.}$ und Spalten mit $A_{.k}$ bezeichnet. Die Elemente a_{ik} einer Matrix A erscheinen jetzt als Produkt von 3 Matrizen: $a_{ik} = e_i' A e_k$, was doch nicht empfehlenswert ist. Man muß zugeben, daß sich manches in der neuen Bezeichnung einfacher darstellen läßt als bisher. Es gilt aber auch die Umkehrung. Es ist wohl fraglich, ob sich die vom Autor empfohlene Bezeichnungsweise einbürgert.

Das Buch enthält neben einer Einführung in die Matrizenrechnung deren Anwendung auf die Auflösung von linearen Gleichungssystemen, auf die Bildung der Kehrmatrizen und auf Eigenwertprobleme. Die Fülle des hier Gebotenen ist überraschend. Manches steht in keinem anderen Lehrbuch. Praktische Gesichtspunkte stehen im Vordergrund. Das Buch enthält zahlreiche direkte und noch mehr iterative Methoden zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen. Bei der Bildung der inversen Matrizen ist es umgekehrt. Bei den Eigenwertproblemen überwiegen die iterativen Methoden weitaus. Der Verfasser muß

auf dem Gebiete der praktischen Mathematik nicht nur umfangreiches Wissen, sondern auch große Erfahrung haben. Daher ist er imstande, die Vor- und Nachteile der Methoden kritisch abzuschätzen. Er zeigt auch, welche Methoden für Tischrechenmaschinen und welche für Rechenautomaten empfehlenswert sind. Die zahlreichen numerisch durchgeführten Beispiele wirken sehr instruktiv. Alles in allem ist es ein Lehrbuch, das dem praktischen Mathematiker viel bietet.

N. Hofreiter, Wien

Enzyklopädie der Elementarmathematik. Redaktion: *P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch, A. J. Chintschin.* Band II: Algebra. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 8.) VI, 405 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956.

Wie im Band I, der in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **59**, 241) besprochen wurde, ist der Inhalt auch des zweiten Bandes nicht die Elementarmathematik. Diese bildet nur den Ausgangspunkt. An den Unterricht in der Schule wird oft angeknüpft und dem Lehrer wird manch wertvoller Ratschlag erteilt. Der zweite Band besteht aus drei Teilen. Der erste — von *A. I Uskow* verfaßte — Teil hat den Titel: Vektorräume und lineare Transformationen. Er bringt das, was wir lineare Algebra nennen, also Determinanten, Matrizen, lineare Gleichungssysteme in vektorieller Behandlung, lineare symmetrische und orthogonale Transformationen, Hauptachsentransformation. Der zweite Teil stammt von *L. J. Okunjew* und handelt von Polynomen und ihren Nullstellen, Irreduzibilitätskriterien, symmetrischen Funktionen, Gleichungen dritten und vierten Grades, Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen, Galoissche Theorie. Der dritte Teil, von *A. P. Domorjad* geschrieben, bringt numerische und graphische Methoden zur Auflösung von algebraischen und transzendenten Gleichungen. Es werden die bekannten und bisher bewährten Methoden ausführlich dargestellt.

Alle drei Teile zeigen hohes Niveau und sind hervorragend in der Darstellung.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Gruppentheorie. Von *K. Sielaff.* (Schriftenreihe zur Mathematik: Heft 4.) 82 S. Frankfurt a. M.—Hamburg: O. Salle, Verlag. 1956. DM 5.80.

Wenn auch der Begriff der Gruppe in den Mittelschulen nicht gebracht wird, so ist es wünschenswert, wenn dies in Arbeitsgemeinschaften erfolgt. Das kleine Buch gibt eine für solche Zwecke brauchbare Unterlage. Ausgehend von mehreren Beispielen werden der Gruppenbegriff erarbeitet und einige Folgerungen aus den Gruppenpostulaten gezogen. Es werden Untergruppen, Normalteiler und Faktorgruppen erklärt. Um die Darstellung anschaulich zu gestalten und die Anwendbarkeit der Gruppentheorie zu zeigen, werden die Bewegungsgruppen bevorzugt behandelt.

N. Hofreiter, Wien

Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie. Von *A. Speiser.* Vierte, erweiterte und berichtigte Auflage. Mit 43 Textabb., einer Farbtafel, XI, 271 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1956. sfr. 23.—, DM 23.—; geb. sfr. 26.—, DM 26.—.

Die ersten drei Auflagen wurden in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **33**, 7 (1923), **36**, 20 (1929), **46**, 16 (1938)) ausführlich besprochen. Die vierte Auflage unterscheidet sich von der dritten — abgesehen von kleinen Verbesserungen — durch einen Anhang. Darin wird der Unterschied zwischen Substitution und Funktion

auseinandergesetzt, das Problem der Überdeckung der Ebene in der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Geometrie mit regulären m-Ecken behandelt, die Gruppen der Kleinschen Kreisfiguren diskutiert und die Färbung der Ornamente besprochen. Es ist zu erwarten, daß das Buch auch weiterhin ein Standardbuch der Gruppentheorie im deutschen Sprachraum bleibt. *N. Hofreiter*, Wien

Gruppentheorie. Von *W. Specht.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 82.) VII, 457 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 66.—, geb. DM 69.60.

Obwohl sich die Gruppentheorie selbst seit Beginn des 20. Jahrhunderts zu einem gewaltigen Lehrgebäude entwickelt hat und ihre Begriffe und Methoden heute auch schon in den meisten anderen Zweigen der Mathematik Anwendung finden, gibt es eigentlich nur wenige Lehrbücher dieses Gebietes. Darunter befand sich bisher nur ein einziges — das von *Kurosch* — in welchem wenigstens ein Teil der gerade in den beiden letzten Jahrzehnten gewonnenen, oft sehr bedeutsamen Ergebnisse dieser Disziplin wiedergegeben wird. Das vorliegende Buch ist nun schon deswegen von großem Wert, weil es ebenfalls viele der neuen Resultate enthält, vor allem aber aus dem Grund, weil in ihm die wichtigsten Begriffe und Methoden der modernen Gruppentheorie mit bisher unerreichter Einheitlichkeit und Geschlossenheit dargestellt werden. Der Verfasser hat dabei vor allem Gedankengänge und Sätze von möglichst weitgehender Allgemeinheit in das Buch aufgenommen; für engere Klassen von Gruppen gültige Ergebnisse oder Methoden werden entweder nur erwähnt (wie z. B. der Satz von *Wielandt* über den Automorphismenturm) oder überhaupt nicht behandelt (wie etwa die Verlagerung und die damit zusammenhängenden Sätze). Typisch für diese Grundtendenz dieses Buches ist z. B. die Tatsache, daß fast durchwegs Gruppen mit Operatorenbereich betrachtet werden, oder etwa der Abschnitt „Abstrakte Gruppeneigenschaften", in dem Gedankengänge, die in gruppentheoretischen Untersuchungen implizit immer wieder vorkommen, erstmalig systematisch entwickelt werden. In der Terminologie weicht der Verfasser nicht selten vom bisher üblichen ab; so sagt er etwa „ähnlich" statt „konjugiert", spricht von „Normalfolgen" statt von „Normalketten" usw.; auch manche Beweismethoden sind neuartig, so z. B. schon die Beweise der Isomorphiesätze, bei denen neben dem bisher verwendeten „ersten Homomorphiesatz" noch ein „zweiter Homomorphiesatz" benützt wird. Alle diese Neuerungen sind durchaus zweckmäßig und tragen zur Vereinheitlichung des ganzen Aufbaues bei. Überhaupt ist die Darstellung des Stoffes fast ausnahmslos ausgezeichnet: Knapp und präzise, dabei aber für den an abstraktes Denken gewöhnten Leser bequem verständlich. An Vorkenntnissen werden eigentlich nur die Anfangsgründe der Mengenlehre vorausgesetzt.

Der Inhalt des Buches ist gegliedert in drei Teile: Im ersten Teil („Einführung") werden zunächst grundlegende Dinge aus der Mengenlehre zusammengestellt, dann die Begriffe Untergruppe und Normalteiler und ihre Anwendungen behandelt; es folgt ein Kapitel über isomorphe und homomorphe Abbildungen von Gruppen und eines über Gruppen mit Operatoren. Der zweite Teil („Freie und direkte Zerlegungen") behandelt zunächst die freien Gruppen und ihre Untergruppen sowie die Darstellung von Gruppen als Faktorgruppen freier Gruppen; anschließend wird die Theorie der freien Produkte und der freien Produkte mit vereinigter Untergruppe entwickelt. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit Zerlegungen in direkte Produkte und mit der Theorie der Verfeinerung solcher Zerlegungen, hierauf folgt ein Abriß der Strukturtheorie der

abelschen Gruppen. Der dritte Teil („Allgemeine Strukturtheorie") beginnt mit einem Kapitel über Normalfolgen und behandelt natürlich auch die sich aus diesem Begriff ergebenden besonderen Gruppentypen, wie metabelsche, auflösbare, nilpotente Gruppen, bringt sodann die Theorie der p-Gruppen und schließt mit einer Darstellung der *Baer*schen Erweiterungstheorie.

Mit diesem sorgfältig ausgearbeiteten, inhaltsreichen Werk hat der Verfasser ohne Zweifel eine Leistung vollbracht, für die ihm die mathematische Welt zu großem Dank verpflichtet ist. Sicher wird das Buch lange Zeit ein Standardwerk der Gruppentheorie bleiben. *W. Nöbauer*, Wien

Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups. Von *M. Suzuki*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 10.) VII, 96 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 16.50.

In den letzten Jahren wurden zahlreiche Untersuchungen über Probleme angestellt, die mit dem Verband der Untergruppen einer Gruppe zusammenhängen. Der vorliegende Ergebnisbericht gibt nicht nur eine systematische Darstellung des heutigen Standes der Forschung, sondern ist darüber hinaus eine selbständig lesbare Monographie dieses Gebietes, da er auch die Beweise fast aller angeführten Sätze enthält. Er wird daher in Zukunft ein unentbehrliches und richtungweisendes Hilfsmittel für die Weiterentwicklung der Theorie der Untergruppenverbände sein.

Der erste Teil des Heftes beschäftigt sich mit Gruppen, deren Untergruppenverband spezielle Eigenschaften besitzt, z. B. distributiv, modular oder komplementär ist. Man versucht dabei, aus der Struktur des Verbandes auf die Struktur der Gruppe zu schließen; wenn auch schon viele Sätze in dieser Richtung vorliegen, so gibt es hier aber doch noch zahlreiche ungelöste Fragen. Der zweite Teil behandelt isomorphe Abbildungen von Untergruppenverbänden aufeinander. Hier ist z. B. die Frage von Interesse, unter welchen Voraussetzungen ein Verbandsisomorphismus durch einen Isomorphismus der Gruppe induziert wird, oder die Frage nach den indexerhaltenden Verbandsisomorphismen; ein anderes hierher gehöriges Problem ist etwa, aus speziellen Annahmen über die Struktur der einen von zwei Gruppen mit isomorphen Untergruppenverbänden Aussagen über die Struktur der anderen abzuleiten. Der dritte Teil hat die verbandshomomorphen Bilder von Untergruppenverbänden zum Gegenstand, und zwar geht es hier wieder vor allem darum, welche Gruppen Verbandshomomorphismen mit bestimmten, gegebenen Eigenschaften besitzen. Das letzte Kapitel enthält Sätze über Gruppen, deren Untergruppenverbände dual-isomorph sind.

W. Nöbauer, Wien

Canon Arithmeticus. Von *C. Jacobi*. Nach Berechnungen von *W. Patz* in verbesserter und erweiterter Form neu herausgegeben von *H. Brandt* †. (Mathematische Lehrbücher in Monographien. II. Abt.: Band II.) 432 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1956. DM 46.—.

Der im Jahre 1839 erschienene Canon arithmeticus von *C. Jacobi* ist seit langem vergriffen. Daher ist eine Neuherausgabe erwünscht. Um zuverlässige Tafeln zu erhalten, wurden alle Tabellen neu berechnet und dabei Methoden benutzt, die gute Kontrollen ermöglichen. Die neuen Tabellen sind etwas umfangreicher als die alten und enthalten die Numerus- und Indextafeln der Zahlen unter 1000, die primitive Wurzeln besitzen. Ferner bringen sie auch die Numerus- und Indextafeln für die Potenzen von 2^4 bis 2^{11}. Dieses Tafelwerk wird bei vielen Rechnungen ein wertvoller Behelf sein. *N. Hofreiter*, Wien

Maß und Integral und ihre Algebraisierung. Von *C. Carathéodory*. Herausgegeben von *P. Finsler, A. Rosenthal, R. Steuerwald*. Mit 12 Textabb., 337 S. Basel und Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1956. Geb. sfr. 38.50, DM 38.50.

Das Buch bringt eine ausführliche Darstellung der Somen und Ortsfunktionen sowie eine darauf aufgebaute allgemeine Maß- und Integrationstheorie.

Die *Somen* (Kap. 1) bilden ein axiomatisch erklärtes System von Objekten, für welche Relationen und Verknüpfungen bestehen, die bei gehöriger Bezeichnung denselben Regeln unterliegen wie die üblichen Relationen und Verknüpfungen der Mengen innerhalb eines σ-Mengenkörpers. Sie entspringen dem Umstande, daß bei der Untersuchung der Mengenfunktionen die Grundeigenschaft der Mengen, nämlich aus Elementen zu bestehen, vielfach gar nicht eingeht, sondern daß nur mit den Mengen als solchen rein formal operiert wird. Nachdem die Somen eingeführt sind, liegt allen folgenden Betrachtungen ein festgedachtes Somensystem zugrunde. Demgemäß treten an Stelle der Mengensysteme Somenmengen (Kap. 2); insbesondere entsprechen (in der Terminologie des Autors) den Mengenkörpern die *Somenringe* und den σ-Mengenkörpern die *vollkommenen Somenringe*. Zugleich werden aus den Mengenfunktionen *Somenfunktionen*.

Dagegen kann die gewöhnliche Definition einer Punktfunktion nicht auf Somen übertragen werden, da diese nicht aus Punkten zu bestehen brauchen. Nun gehört aber zu einer Punktfunktion f mit dem Definitionsbereiche M eine Klasse von Mengenskalen $S(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$, die durch $\{f < y\} \subset \subset S(y) \subset \{f \leqq y\}$ gekennzeichnet sind und die einzeln, zusammen mit M, die Funktion bestimmen; ferner können die Skalen einer Klasse, die auf diese Weise zu einer Punktfunktion auf M gehört, durch einfache Eigenschaften charakterisiert werden. Hiernach kann also eine Punktfunktion auf M auch als Klasse passender Mengenskalen aus M angesehen werden. Damit ist aber der Übergang zu Somen wiederum ohne weiteres möglich, wodurch man zu den *Ortsfunktionen* gelangt (Kap. 3): eine Ortsfunktion f mit dem Definitionsbereich M ist also eine Klasse passender Somenskalen $S(y)$, deren Somen Teile des Somas M sind. Insbesondere entsprechen den konstanten Punktfunktionen Ortsfunktionen, die bei gegebenem M durch eine einzelne Zahl c bestimmt sind und daher mit c bezeichnet werden können. Die Ortsfunktionen auf M lassen sich nach dem Muster der Punktfunktionen teilweise ordnen und bilden dann einen σ-Verband; damit erhalten Aussagen wie $f \geqq 0$ einen Sinn. Weiters kann für jedes nicht leere Teilsoma X von M, wiederum in Anlehnung an die Punktfunktionen, die *untere* und die *obere Grenze* $\alpha(X)$ bzw. $\beta(X)$ von f auf X erklärt werden. Von diesen Somenfunktionen bestimmt eine jede die andere sowie die Funktion f selber; sie stehen im Mittelpunkt des Ausbaues der Theorie der Ortsfunktionen, wozu insbesondere das Rechnen mit solchen Funktionen gehört (Kap. 4).

Eine Somenfunktion heißt *Maßfunktion* (Kap. 5), falls sie einen vollkommenen Somenring als Definitionsbereich hat, dort „überdeckungsbeschränkt" ist und für das leere Soma verschwindet. Diese Eigenschaften entsprechen den ersten drei Axiomen der äußeren Maße in der klassischen Maßtheorie des Verfassers, der auch die Erklärung der *Meßbar. eit* eines Somas bezüglich einer Maßfunktion $\varphi(X)$ entnommen ist. Daneben heißt eine Ortsfunktion f *meßbar* für $\varphi(X)$, wenn sie eine Somenskala $S(y)$ besitzt, deren Somen für $\varphi(X)$ meßbar sind. Unter die Maßfunktionen im jetzigen Sinn fällt insbesondere das *Lebesgue*sche äußere Maß der n-dimensionalen Punktmengen.

Trotz des sehr allgemeinen Charakters der Maßfunktionen kann für sie eine Integrationstheorie der Ortsfunktionen entwickelt werden (Kap. 6); dabei muß

die betrachtete Ortsfunktion f meßbar für die zugrundegelegte Maßfunktion $\varphi(X)$ sein und ihr Definitionsbereich M sich als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen meßbaren Somen U darstellen lassen, für welche $\varphi(U)$ eine endliche Zahl ist. Im Falle $f \geqq 0$ tritt dann das *Integral* von f (in Anlehnung an den anschaulichen Inhalt einer Ordinatenmenge) als Maßfunktion $\psi(X)$ auf, die durch gewisse naheliegende Eigenschaften gekennzeichnet und für jedes Teilsoma X von M definiert ist; der allgemeine Fall wird sodann auf diesen zurückgeführt. Für die so erklärten Integrale (welche die *Lebesgue*schen umfassen) bleiben die zentralen Sätze der *Lebesgue*schen Theorie bestehen (Kap. 7).

Die restlichen Kapitel 8 bis 11 setzen die Theorie der Maßfunktionen fort. Nach Einführung der *Basen* werden jetzt die *regulären Maßfunktionen* und sodann aus diesen die *Inhaltsfunktionen* herausgehoben und ausführlich untersucht. Daneben wird u. a. die *Jessen*sche Maßfunktion auf dem unendlichdimensionalen Torus sowie das lineare Maß der n-dimensionalen Punktmengen in die Inhaltsfunktionen eingereiht.

Ein Anhang behandelt prinzipielle Fragen über Somen.

Das Manuskript des Buches konnte der vor sechs Jahren verstorbene Verfasser noch selbst abschließen, mußte es aber den Herausgebern überlassen, in der Zwischenzeit den endgültigen Text zu schaffen. Hierdurch ist eine vorbildlich klare und streng systematische Darstellung eines grundlegenden Stoffes entstanden, der bisher nur lückenhaft und zerstreut vorhanden war, nun aber in einem handlichen Band übersichtlich angeordnet beisammen ist.

K. Mayrhofer, Wien

Einführung in die konforme Abbildung. Von *L. Bieberbach*. Fünfte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 768/768a.) 180 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1956. DM 4.80.

Auch in dieser mehrfach erweiterten Neuauflage wird die knappe aber klare und erstaunlich viel umfassende Darstellung der konformen Abbildung ihre Beliebtheit bewahren. Nach den einführenden Kapiteln (lineare Funktionen, rationale Funktionen, Spiegelungsprinzip, spezielle Abbildungen) gibt das mehr als die Hälfte umfassende letzte Kapitel den Riemannschen Abbildungssatz, einiges zur Potentialtheorie, Verzerrungssätze, die Löwnersche Differentialgleichung und Uniformisierung. *H. Hornich*, Graz

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel*. Fünfte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 920.) 129 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1956. DM 2.40.

Von einer kleinen Umstellung abgesehen ist dies eine unveränderte Neuauflage der vierten, im Jahre 1951 erschienenen und in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **56**, 81) besprochenen Auflage des beliebten Büchleins. *H. Hornich*, Graz

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von *W. W. Stepanow*. IX, 470 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 29.30.

Dieses aus dem Russischen übersetzte Lehrbuch gibt den Stoff des Studienplanes wieder, wie er an den sowjetischen Universitäten gelehrt wird. Er beschränkt sich auf den reellen Teil der Theorie und umfaßt gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Eine große Anzahl von Beispielen und Aufgaben unterstützen den Text, ein letztes Kapitel gibt einen historischen Abriß.

H. Hornich, Graz

Tables of Weber Parabolic Cylinder Functions. Herausgegeben von *J. C. P. Miller*. Mit 19 Textabb., 233 S. London: Her Majesty's Stationery Office. 1955. 63 s.

Unter den parabolischen Zylinderfunktionen $W(a, x)$ von *Weber* — kurz Webersche Funktionen genannt — versteht man die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (^1/_4\, x^2 - a)\, y = 0$$

Sie treten bei verschiedenen Problemen der Physik und Technik auf. Der Herausgeber gibt zunächst einen 40 Seiten langen Bericht über die Weberschen Funktionen, über Näherungslösungen, Potenzreihenentwicklungen, Standardlösungen, Integraldarstellungen, asymptotische Entwicklungen und über Beziehungen zu den Besselfunktionen und zu den konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Dann folgt eine Beschreibung der Tafeln. Die Haupttafeln enthalten die Werte von $W(a, x)$ für $-10 \leqq a \leqq 10$ (a ganz) und $-10 \leqq x \leqq 10$ mit der Intervallänge 0,1. Die anderen Tafeln bringen Hilfsfunktionen. *N. Hofreiter*, Wien

Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen. Von *W. D. Kupradse*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 21.) Mit 11 Textabb., VIII, 239 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 27.60, geb. DM 29.70.

Bekanntlich führen zahlreiche, wichtige Probleme der mathematischen Physik auf Randwertaufgaben der Schwingungsgleichung, die Theorie dieser Randwertaufgaben bietet jedoch teilweise beträchtliche Schwierigkeiten. Auch der Verfasser des Buches hat in einer Reihe von Arbeiten auf diesem Gebiet bedeutsame Resultate erzielt, welche in dem Werk zusammenfassend dargestellt werden; darüber hinaus sind in ihm aber vorher noch nicht veröffentlichte, umfangreiche Untersuchungen über Schwingungen elastischer Körper enthalten. Zur Untersuchung der Randwertaufgaben verwendet der Verfasser die Methoden der Potentialtheorie; dabei erweist sich die Überführung der Aufgaben in Integralgleichungen als äußerst fruchtbares Hilfsmittel, sowohl für die Durchführung von Existenzbeweisen, als auch für die tatsächliche Durchrechnung vieler Probleme.

Im ersten Kapitel werden die allgemeinen Eigenschaften der Schwingungsgleichung behandelt, im zweiten Kapitel werden die fundamentalen Randwertprobleme für das Außengebiet gelöst. Im dritten Kapitel werden die vorher erzielten Resultate auf Probleme der Elektrodynamik und Elektrostatik angewendet, das vierte bringt die oben erwähnten Untersuchungen über stationäre Schwingungen elastischer Media. Im fünften Kapitel schließlich werden Methoden zur expliziten Lösung von in den Anwendungen auftretenden Systemen singulärer Integralgleichungen angegeben.

Dieses Buch ist erstmalig im Jahre 1950 in russischer Sprache erschienen und liegt nun also auch in einer deutschen Übersetzung vor, welche gegenüber dem Original manche Änderungen, Ergänzungen und Zusätze enthält. Die Reihe der Hochschulbücher für Mathematik hat dadurch wieder eine sehr wertvolle Bereicherung erfahren. *W. Nöbauer*, Wien

Näherungsmethoden der höheren Analysis. Von *L. W. Kantorowitsch* und *W. I. Krylow*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 19.) Mit 68 Textabb., XI, 611 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. Geb. DM 47.–.

Das Buch ist eine Übersetzung der dritten Auflage in russischer Sprache. Es setzt vom Leser einige Kenntnisse aus der Funktionentheorie und der Theorie

der Differentialgleichungen voraus. Hat der Leser die nötigen Vorkenntnisse, so wird er das Buch unschwer verstehen. Denn die Darstellung ist sehr ausführlich und besonders instruktiv. Es sind Probleme der mathematischen Physik, die hier in erster Linie behandelt werden. Während in manchen Büchern hauptsächlich Methoden gebracht werden, die vorwiegend theoretisch interessant sind, werden hier vor allem Näherungsmethoden zur Lösung von Aufgaben der mathematischen Physik entwickelt. Dies ist durchaus gerechtfertigt, ja sogar erwünscht, denn gerade die in der Technik auftretenden Probleme können vielfach mit den allgemeinen Methoden gar nicht gelöst werden und verlangen Näherungsmethoden zu ihrer Lösung. Die Näherungsmethoden werden ausführlich begründet und an sehr schönen Beispielen wird die Brauchbarkeit der Methoden gezeigt. Die Probleme der mathematischen Physik führen vorwiegend auf Randwertaufgaben von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, auf Integralgleichungen und auf Aufgaben der Variationsrechnung. Daher werden diese Gebiete ausführlich behandelt, wozu noch die konforme Abbildung kommt. Unter den Näherungsmethoden bewähren sich besonders die Methode der Reihenentwicklung, die Methode der sukzessiven Approximation, das Differenzenverfahren und der vielfältige Funktionenansatz, unter dem die Methoden von *Ritz* und *Galerkin* besonders beliebt sind. Besonders hervorheben möchte ich die Näherungsmethoden für Integralgleichungen, die die Auflösung in einer für den praktischen Mathematiker erwünschten Form gestatten. Wenn auch weniger die allgemeine Theorie als vielmehr die in der Praxis wichtigen speziellen Differentialgleichungen behandelt werden, so erfolgt die Durchführung in theoretisch befriedigender Art, wozu Fehlerabschätzungen und Konvergenzuntersuchungen der Reihenentwicklung gehören. Natürlich kommt es in erster Linie auf die praktische Lösung eines Problems an. Zahlreiche Bemerkungen erweisen sich für das praktische Rechnen als besonders nützlich.

N. Hofreiter, Wien

Metody Numeryczne i Graficzne. Von *J. Lukaszewicz* und *M. Warmus*. Teil I. Mit 78 Textabb., 429 S. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. 1956.

Das Buch gibt eine leicht lesbare Einführung in die numerischen und graphischen Methoden der praktischen Analysis. Es beginnt mit einem Kapitel über Fehlerrechnung, wobei auch die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinandergesetzt werden. Hierauf folgt eine Einführung in die Differenzenrechnung. Das dritte, mit „Interpolation" überschriebene Kapitel bringt die Interpolationsformeln von *Lagrange*, *Newton*, *Gauß*, *Stirling*, *Bessel*, *Everett*, sowie z. B. einiges über Interpolation durch gebrochene rationale Funktionen. Dann folgen verschiedene Methoden der Approximation von Funktionen, z. B. durch Potenzreihen und Tschebyscheffsche Polynome und die Methode der kleinsten Quadrate, sowie harmonische Analyse. Verschiedene Verfahren zur näherungsweisen Auflösung von Gleichungen, z. B. durch Regula falsi, Methode von *Newton*, *Euler* und verschiedene Iterationsverfahren bilden den Inhalt des darauffolgenden Kapitels. Besonders ausführlich wird dann auf die Auflösung von linearen Gleichungssystemen eingegangen, wobei auch ein kurzer Abriß der Matrizentheorie gegeben wird. Kap. 7 beschäftigt sich mit den numerischen und graphischen Methoden zur Differentiation und Integration. Funktionsskalen, Rechenschieber und Nomographie werden ausführlich in den letzten drei Kapiteln dargestellt. Am Schluß sind noch verschiedene Tabellen beigefügt, z. B. über Normal- und t-Verteilung, Koeffizienten in verschiedenen

Interpolationsformeln usw. Zahlreiche durchgerechnete Beispiele sind ein ganz wesentlicher Vorteil des Werkes. Die Darstellungsweise ist betont einfach und sehr breit und jeder polnisch sprechende Student wird hier eine mühelose Einführung in das zunächst etwas trockene, jedoch bei näherer Beschäftigung sehr reizvolle Gebiet der praktischen Analysis finden. *K. Prachar*, Wien

Principles and Techniques of Applied Mathematics. Von *B. Friedman*. IX, 315 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc.—London: Chapman & Hall, Ltd. 1956.

Das Buch will helfen, die Kluft zwischen reiner und angewandter Mathematik zu überbrücken. Es bringt in der ersten Hälfte die Theorie der linearen Räume und der Operatoren und insbesondere die Spektraltheorie der Operatoren. Diese naturgemäß reichlich abstrakten Ausführungen werden in der zweiten Hälfte auf Eigenwertprobleme von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen angewandt. Herausgearbeitet werden die folgenden zwei grundlegenden Methoden, um die lineare Gleichung $Lx = m$ zu lösen, wo L ein linearer Operator, m ein gegebener und x ein unbekannter Vektor ist. Die erste Methode besteht darin, den inversen Operator L^{-1} zu finden. Ist L ein Differentialoperator, so ist L^{-1} ein Integraloperator. Der Kern des Integraloperators heißt Greensche Funktion des Differentialoperators, die zu ermitteln ist. Dabei tritt die Diracsche δ-Funktion auf. Der Verfasser bemüht sich, dem Leser die Theorie der Distributionen von *L. Schwartz* verständlich zu machen. Die zweite Methode benutzt die Spektraldarstellung des Operators L. Dazu werden die Lösungen der Gleichung $Lu = \lambda u$ studiert, wo λ eine Konstante ist. Störungstheorie und Eigenfunktionsentwicklungen spielen dabei eine wichtige Rolle. Das Buch enthält viele Aufgaben, die größtenteils Beweise sind. Numerisch durchgeführte Beispiele sind kaum vorhanden. Interessenten des Buches sind weniger die praktischen Mathematiker und Ingenieure, als vielmehr die theoretischen Physiker und alle reinen Mathematiker, die Vorliebe für mathematische Physik haben. *N. Hofreiter*, Wien

Numerical Analysis. Proceedings of the 6 th Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, Held 1953. Herausgegeben von *J. H. Curtiss*. VI, 303 S. New York—Toronto—London: McGraw Hill Book Company. 1956. $ 9.75.

Die Beiträge stammen von *R. Bellman*, *St. Bergman*, *R. Bruck*, *D. Clutterham*, *J. Fischbach*, *S. Frankel*, *C. Hastings*, *J. Hayward*, *M. Hestenes*, *E. Lehmer*, *T. Motzkin*, *P. Rosenbloom*, *A. Sard*, *A. Taub*, *O. Taussky*, *C. Tompkins*, *J. Walsh*, *S. Warschawski*, *W. Wasow*, *H. Wielandt*, *J. Wong* und *D. Young*.

Manche Vorträge gehören der numerischen Analysis im engeren Sinne an, wenn etwa über die praktische Auflösung von Gleichungssystemen und von Differentialgleichungen berichtet wird oder über Methoden, die bei Rechenautomaten angewandt werden. Praktische Probleme stehen noch im Vordergrund bei Vorträgen, die der Statistik, der konformen Abbildung, den Randwertproblemen, den Integralgleichungen oder der Variationsrechnung angehören. Vorträge, in denen die Theorie der Operatoren und der linearen Räume eine große Rolle spielen, sind vorwiegend theoretisch, aber die Ergebnisse lassen sich auf Probleme der mathematischen Physik anwenden. Ich halte es für erfreulich, daß auch zwei zahlentheoretische Vorträge zugelassen wurden. Der eine Vortrag berichtete über Ergebnisse, die mit Rechenautomaten über Fragen der Zahlentheorie erzielt wurden, während der zweite Vortrag von algebraischer

Zahlentheorie handelte, wobei auf die hier zutage tretenden numerischen Schwierigkeiten hingewiesen wurde. *N. Hofreiter*, Wien

Nichtlineare Regelvorgänge. Vorträge gehalten bei der Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Darmstadt am 8. September 1955. Herausgegeben von *W. Hahn*. (Beihefte zur Regelungstechnik.) Mit 67 Textabb., 107 S. München: Verlag R. Oldenbourg. 1956.

Während die Methoden zur Behandlung linearer Regelungsvorgänge bereits weit entwickelt und in vieler Hinsicht befriedigende Ergebnisse liefern, steht die Entwicklung auf dem Gebiete der nichtlinearen Vorgänge noch am Anfang. Es gibt zwar schon eine Reihe von Verfahren, die sich in gewissen Fällen bewährt haben. Jedoch stehen noch viele Fragen, insbesondere bezüglich Anwendbarkeitsbereich und Genauigkeit offen. Die Tagung hatte den Zweck, einem Kreis von Interessenten aus Theorie und Praxis die wichtigsten Methoden nahezubringen und zu weiteren Beschäftigungen mit diesen Problemen anzuregen. Es wurden sechs größere Vorträge gehalten, von denen der erste von *G. Doetsch* über „Stabilitätsuntersuchungen auf Grund der Laplacetransformation in exakter Behandlung" als Überleitung gedacht war und sich nur mit linearen Problemen beschäftigte. Da dieser Vortrag bereits an anderer Stelle veröffentlicht wurde, so werden hier nur die folgenden fünf besprochen: 1. *K. Magnus* „Das *A*-Kurven-Verfahren zur Berechnung nichtlinearer Regelvorgänge". 2. *J. M. L Janssen* und *J. C. Vermeulen* „Behandlung von Regelungsproblemen mit Hysteresis und Reibung nach der Methode der Beschreibungsfunktion". 3. *W. Hahn* „Behandlung zweier Stabilitätsprobleme mit der zweiten Methode von *Ljapunov*". 4. *E. Pestel* „Anwendung der Ljapunovschen Methode und des Verfahrens von *Krylov-Bogoljubov* auf ein technisches Beispiel". 5. *W. Haacke* „Untersuchungen eines nichtlinearen Regelkreises in einer mehrblättrigen Phasenebene". Die Zusammenstellung der unter Berücksichtigung der Diskussionsbemerkungen überarbeiteten Vorträge und deren gegenseitige Abstimmung hat *W. Hahn* übernommen.

Der Vortrag von *K. Magnus* berichtet über eine Kombination des von *Krylov* und *Bogoljubov* angegebenen Verfahrens zur Linearisierung von Differentialgleichungen mit dem Stabilitätskriterium von *Hurwitz*, durch die es möglich wird, alle interessierenden Aussagen über Stabilität und Gefährlichkeit zu gewinnen. Der Vortrag von *Janssen* und *Vermeulen* berichtet über in Delft angestellte Untersuchungen an nichtlinearen Regelkreisen, die mit Hilfe der Beschreibungsfunktion gedeutet werden können. *W. Hahn* entwickelt in seinem Vortrag die sogenannte zweite Methode von *Ljapunov*, die es gestattet, Stabilitätsfragen zu entscheiden. Dieses Verfahren setzt allerdings die Kenntnis einer sogenannten Trägerfunktion voraus, für deren Auffindung keine allgemeine Methode bekannt ist. Jedoch hat gerade diese Methode den Vorteil, daß sie im Gegensatz zu anderen Methoden theoretisch wohl fundiert ist, so daß ihre Anwendbarkeit gesichert ist. *E. Pestel* zeigt nun in seinem Vortrag die Anwendung der Methode von *Ljapunov* und *Krylov-Bogoljubov* auf das Beispiel der Steuerung eines Flugkörpers. Er zeigt auch, daß gewisse Modifikationen der Methoden Vereinfachungen des Rechenganges gestatten. Der letzte Vortrag von *W. Haacke* schließlich beschäftigt sich mit der Anwendung des Verfahrens der Phasenebene auf einen Regelkreis für eine Drehzahlregelung. Das von ihm verwendete Verfahren hat keinen allgemeinen Anwendungsbereich, gestattet aber dafür eine exakte Behandlung des Problems.

Es ist sehr zu begrüßen, daß durch die Drucklegung das auf der Tagung Gebotene allgemein zugänglich gemacht wurde. *E. Bukovics*, Wien

Automatic Digital Computers. Von *M. V. Wilkes.* Mit 116 Textabb., X, 305 S. London: Methuen & Co. Ltd. 1956. 42 s.

Rechenzentren mit programmgesteuerten Ziffernrechenmaschinen bestehen heute in beachtlicher Anzahl. Das klaglose Funktionieren einer solchen Einrichtung hängt von der Arbeit mehrerer hochspezialisierter Fachleute ab: da gibt es Mathematiker, die die Probleme formulieren, Programmierer, die die Formeln in die Sprache der Maschine übersetzen, Techniker, die die Anlage warten und daneben noch Organisatoren und Kaufleute, die mit der Führung eines technischen und kommerziellen Betriebes vertraut sein müssen.

M. V. Wilkes, der Direktor des Mathematischen Laboratoriums von Cambridge, gibt mit dem vorliegenden Buch einen Querschnitt durch die Vielfalt der geschilderten Aufgaben. Da finden sich Kapitel über Röhrenrechenwerke, oder über Speicherung von Zahlen und Abschnitte über die Erstellung von Programmen und den Einbau von Unterprogrammen. Die geschichtliche Entwicklung der programmgesteuerten Maschinen ist breit geschildert, wobei man freilich — ebenso wie im Kapitel über die Relaismaschinen — eine Erwähnung der Priorität *Zuses* vermißt. Hochinteressant sind die Erfahrungen, die der Verfasser über die Organisation eines wissenschaftlichen Rechenzentrums wiedergibt und auch der leider viel zu kurze Anhang, der die Überschrift „Maschinen und Intelligenz" trägt, wird einen breiten Leserkreis ansprechen.

Ein Buch, das den so aktuellen und interessanten Problemkreis der programmgesteuerten Rechenmaschinen so sachkundig und lebendig behandelt, muß wärmstens weiterempfohlen werden: Nicht nur allen Mitarbeitern eines Rechenzentrums, die gewissenhaft nebeneinander Spezialaufgaben erfüllen, ohne jemals Überblick über die gesamten Probleme zu gewinnen, sondern auch jenem großen Publikum, das lang genug durch unsachliche und unzutreffende Berichte über „Elektronengehirne" irregeführt wurde. *W. Knödel*, Wien

Nomographisches Rechnen. Einführung in die Nomographie für Schule und Beruf. Von *F. Kießler.* Mit 162 Zeichnungen und Zahlentafeln, 190 S. Essen: Verlag W. Girardet. 1956. DM 9.80.

In diesem Buch werden nur ganz elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. In sehr breiter Darstellung erfolgt die Einführung in die zeichnerische Darstellung von Funktionen im rechtwinkeligen Koordinatennetz mit verzerrten Achsenteilungen, in das Rechnen mit Logarithmen, in die Verwendung von logarithmischen Leitern und logarithmischen Netzen. Es werden die verschiedenen Doppelleitern erörtert. Eine genaue Behandlung erfahren zahlreiche Tafeln und kompliziertere Leitertafeln. Ausführlich besprochen werden Sonderrechenstäbe mit einer Zunge bzw. zwei Zungen. Verbundnomogramme und Leitertafeln mit Gitterträgern beschließen dieses Werk, das als Vorbereitung zu der „Angewandten Nomographie" des Verfassers dienen kann. *J. Laub*, Wien

Zahl und Zufall. Eine Einführung in die Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik mit anschaulichen Hilfsmitteln. Von *L. Hogben.* Mit 84 teils farbigen Textabb., 484 S. München: Verlag R. Oldenbourg. 1956. DM 58.50.

Dieses Buch ist eine deutsche Übersetzung der englischen Ausgabe mit dem Titel „Chance and Choice by *Cardpack* and *Chessboard*" Band I. Die englische

Ausgabe wurde bereits in Mh. f. Mathem. 55, 101 (1951) besprochen. Die deutsche Übersetzung könnte stellenweise flüssiger sein, gelegentlich hätte auch die Terminologie der üblichen Sprechweise besser angepaßt werden können.

L. Schmetterer, Wien

Symposium on Monte Carlo Methods. Herausgegeben von *H. A. Meyer*. XVI, 382 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc.—London: Chapman & Hall, Ltd. 1956. $ 7.50.

Die Monte-Carlo-Methode reicht in ihren Wurzeln sehr weit zurück. Vielleicht dürfen wir die Namen *G. L. L. Comte de Buffon* und *M. W. Crofton* erwähnen. Trotzdem hat die Verwendung experimenteller stochastischer Methoden und deren systematisches Studium erst spät eingesetzt und ist eine Frucht des letzten Jahrzehntes. Treffend ist dieser Sachverhalt im Vorwort charakterisiert: „The novelty which the method possesses lies chiefly in its point of view." Hat man früher physikalische Schwankungserscheinungen mathematisch beschrieben, so verwendet man jetzt mit Erfolg das Phänomen der Brownschen Bewegung zur Lösung von Differentialgleichungen. Die Literatur über die Monte-Carlo-Methode ist weit zerstreut und schwer erreichbar. Schon aus diesem Grunde wird man die Herausgabe der vorliegenden zwanzig Beiträge sehr begrüßen. Es ist im Rahmen einer kurzen Besprechung nicht möglich, im einzelnen auf sie einzugehen. Eine Reihe von Beiträgen befaßt sich mit dem wichtigen Problem der Erzeugung von Zufallszahlen (Mid-square Methode, Pseudozufallszahlen). Weitere Vorträge sind mehr theoretischer Natur und behandeln z. B. die Lösung von Integralgleichungen zweiter Art, Zufallswegprobleme, die Verwendung mehrstufiger Stichproben in der Monte Carlo-Methode und eine neue streuungsvermindernde Methode, conditional Monte Carlo genannt. Von besonderem Interesse erscheint mir im Hinblick auf die oft gestellte Frage, ob die Monte-Carlo-Methode auch tatsächlich klassischen Methoden überlegen sei, eine Untersuchung über die aufzuwendende Rechenarbeit bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mittels der klassischen Reduktionsmethode, der Iterationsmethode und der Monte-Carlo-Technik. Eine Reihe weiterer Arbeiten sind auf die Anwendung, vielfach im Bereich der Kernphysik ausgerichtet. Besonders wertvoll erscheint mir die fast 100 Seiten umfassende Bibliographie, welche den zweiten und dritten Teil des Werkes darstellt.

L. Schmetterer, Wien

Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik in Berlin vom 19. bis 22. Oktober 1954. 130 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 14.—.

Die Tagung vereinte Gelehrte aus Bulgarien, Deutschland, Finnland, Frankreich, Polen, Rumänien, der Sowjetunion, der Tschechoslowakei und Ungarn. Die Vorträge umspannten ein weites Gebiet: Von der Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie bis zu den Fragen der Anwendung mathematisch-statistischer Methoden. Vielfach wurden Probleme von eminenter Bedeutung behandelt. Da aber fast alle Vorträge inzwischen eine ausführliche Darstellung gefunden haben, darf ein näheres Eingehen auf ihren Inhalt unterbleiben.

L. Schmetterer, Wien

Analytische Geometrie des Raumes. Von *M. Miller*. (Sammlung Crantz.) Mit 18 Textabb., 91 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 3.40.

Dieser Band schließt an das im gleichen Verlag erschienene Bändchen „Analytische Geometrie der Ebene" von *Crantz-Hauptmann* an. Um den elementaren Charakter zu wahren und dadurch auch z. B. für Hörer an Volkshochschulen verständlich zu sein, wurde bewußt auf den Gebrauch von Vektoren und Determinanten verzichtet. Den gut ausgewählten elementaren Beispielen über die Gerade, die Ebene und die Flächen zweiten Grades ist sowohl die Lösung als auch der Lösungsweg beigegeben. Die Darstellung ist recht gut verständlich.

J. Laub, Wien

Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? Von *G. Scheffers*. Zweite Auflage, verbessert und erweitert von *K. Strubecker*. (Mathematisch-physikalische Bibliothek. Reihe I: Band 85/86.) Mit 30 Textabb. und 12 Tafeln, 114 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 4.90.

Dieses bekannte Bändchen erhielt nun in der zweiten Auflage von *K. Strubecker* einen Anhang, in dem eine kurze mathematische Einführung in die Kartenprojektion dargelegt ist.

J. Laub, Wien

Der vierdimensionale Raum. Von *R. Weitzenböck*. (Wissenschaft und Kultur: Band 10.) Mit 54 Textabb., 223 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 1956. sfr. 19.55, DM 19.55.

Es handelt sich hier um die Neubearbeitung eines im Jahre 1929 bei Vieweg in Braunschweig in der Reihe „Die Wissenschaft" unter dem selben Titel erschienenen Buches, welches in Band 38 der „Monatshefte" besprochen wurde. Der Verfasser hat den Aufbau des Werkes nicht geändert, jedoch verschiedene Ergänzungen eingefügt; diese betreffen meist seit dem Erscheinen der ersten Fassung des Buches neu veröffentlichte Gedankengänge verschiedener Autoren über den R_4. Dementsprechend wurde auch das Literaturverzeichnis um etwa 80 Nummern vermehrt.

So gibt das interessante Buch in der Neufassung erst recht einen ausgezeichneten Überblick über die Rolle, welche die Idee der „vierten Dimension" auf verschiedenen Gebieten unseres kulturellen Lebens spielt und gespielt hat, und wird daher sicherlich viele aufmerksame Leser finden.

W. Nöbauer, Wien

Konvexe Figuren. Von *I. M. Jaglom* und *W. G. Boltjanski*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 24.) Mit 318 Textabb., XVI, 257 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 15.—.

Das Buch setzt sich zum Ziel, einerseits das anschaulich-geometrische Denkvermögen des Studenten zu schulen — dafür sind klarerweise viel mit analytischen Hilfsmitteln arbeitende Teilgebiete der Geometrie, wie die analytische Geometrie oder die Differentialgeometrie, auf denen gewöhnlich das Hauptgewicht der geometrischen Ausbildung liegt, wenig geeignet und nur solche Teilgebiete günstig, wo die Anschauung noch eine führende Rolle spielt —, andererseits will es ihn möglichst frühzeitig auf selbständiges wissenschaftliches Denken und Arbeiten vorbereiten — hierzu eignet sich natürlich vor allem ein Gebiet, auf dem man mit möglichst geringen mathematischen Vorkenntnissen das Auslangen finden kann. Die Theorie der konvexen Figuren erfüllt nun beide Forderungen — ihre Fragestellungen und Methoden sind rein geometrischer Natur und sie erfordert keine tieferen analytischen Hilfsmittel —, und um das Ziel des Buches — geometrische Schulung des Lesers und Anregung zu selbstän-

diger Arbeit — zu erreichen, werden die wichtigsten Methoden und Sätze dieser Theorie in Form einer Aufgabensammlung mit Lösungen entwickelt. Selbstverständlich sind Dinge, die dem Leser durch Aufgaben nicht vermittelt werden können, wie Definitionen, historische Bemerkungen, Hinweise auf ungelöste Probleme usw., im Text zwischen den Aufgaben enthalten. Da im zweiten Teil des Buches die Lösungen aller (oft gar nicht leichten) Aufgaben ausführlich dargestellt werden, kann das Werk wohl auch als einführendes Lehrbuch in diesen Zweig der Geometrie dienen.

Nach einem einleitenden Paragraphen über allgemeine Eigenschaften konvexer Figuren folgt ein Kapitel über den Satz von *Helly* und seine Anwendungen, das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Anwendung von Stetigkeitsbetrachtungen auf geometrische Probleme, im vierten wird die Addition konvexer Figuren und Kurven behandelt, die nächsten beiden Paragraphen beschäftigen sich mit dem isoperimetrischen Problem und anderen Maximum- und Minimumaufgaben. Dann folgt ein Abschnitt über Kurven konstanter Breite und einer über Kurven, die sich in einem gleichseitigen Dreieck drehen lassen.

Es ist zu begrüßen, daß das in seiner ganzen Anlage und Art sehr hübsche und originelle Buch, dessen russische Ausgabe 1951 erschienen ist, durch die Übersetzung nun auch den Mathematikern der westlichen Länder allgemein zugänglich geworden ist. *W. Nöbauer*, Wien

Algebraic Varieties. Von *M. Baldassarri.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 12.) IX, 195 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 36.—.

Das ist, wie wohl hervorgehoben zu werden verdient, bereits das vierte der innerhalb der letzten zwei Jahre erschienenen 12 Ergebnis-Hefte, welches sich als zur Algebraischen Geometrie gehörig bekennt. Daraus darf man wohl schließen, daß die algebraische Geometrie, ein von den Anwendungen bisher noch nicht beanspruchtes Gebiet der Mathematik, in der jüngst vergangenen Zeit mit sehr regem Interesse und reichen Forschungsergebnissen studiert worden ist. Jedenfalls ist das Erscheinen des vorliegenden Werkes sehr zu begrüßen, denn es bietet, gestützt auf eine sehr gründliche Kenntnis sowohl der klassischen wie auch der hauptsächlich in USA gewachsenen modernen Richtungen, eine ausgezeichnete Darlegung der mannigfachen Problemstellungen und Methoden, die hier entwickelt worden sind, und Verf. ist auch bemüht, ihren wechselseitigen Zusammenhang zu beleuchten und das gegenseitige Verständnis zu erleichtern.

Eine rasche Inhaltsübersicht: Grundbegriffe (Mannigfaltigkeiten, Stellenringe, birationale Transformationen, Schnittmultiplizität usw.); Auflösung der Singularitäten mit *Zariskis* Beweis für die Dimension 3; lineare Scharen und lineare Äquivalenz, adjungierte Formen, kanonische Schar, geometrisches Geschlecht; die verschiedenen Definitionen des arithmetischen Geschlechtes; algebraische und rationale Äquivalenz; Abelsche Mannigfaltigkeiten, insbesondere die (1. und 2.) Picardsche Mannigfaltigkeit, wobei dankenswerter Weise die in Europa übliche Benennung verwendet wird; *Todd*'s Theorie der kanonischen Systeme; topologische Methoden auf komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten und die Theorie der Garben; kontinuierliche Systeme und Flächen-Irregularität; ein ausführliches Literatur- und Sachverzeichnis erleichtert bedeutend den Gebrauch des Buches.

Vollständigkeit wird vom Verf. weder angestrebt noch beansprucht. Das Schwergewicht liegt vielmehr auf den modernen topologischen Theorien. Im

Hinblick auf diese dürfte es angebracht sein, gewisse übersteigerte Bewertungen abzuschwächen, da leicht der Eindruck hervorgerufen wird, als ob sie in allen Fällen eine Verschärfung und Verallgemeinerung des sonst gebräuchlichen und verwendeten repräsentieren müßten. So wird z. B. in den Begriff der abelschen Mannigfaltigkeit die Bedingung der Singularitätenfreiheit mitaufgenommen, während sie im klassischen Sinne lediglich eine durch abelsche Funktionen parametrisch dargestellte Mannigfaltigkeit ist, also keineswegs frei von Singularitäten, wie etwa die Kummersche Fläche und die Wirtingerschen Mannigfaltigkeiten beweisen. Auch sonst werden die zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten fast ausnahmslos als singularitätenfreie vorausgesetzt, was auch im Falle, daß die Auflösbarkeit der Singularitäten bereits bewiesen wäre, eine wesentliche Einschränkung bedeutet, weil gerade das Studium der durch Singularitäten verursachten Änderungen ein fundamentales Anliegen der algebraischen Geometrie ist, wie schon die klassische Theorie der Algebraischen Kurven zeigt.

W. Gröbner, Innsbruck

Problèmes d'Agrégation (Mathématiques Spéciales). Von *J. Dollon*. Zweite Auflage. 388 S. Paris: Librairie Vuibert. 1956. ffr. 1800.

Dies ist eine Sammlung von verschiedenen Problemen, die bei den Prüfungen zur „Agrégation" seit dem Jahre 1912 gestellt wurden. Es sind das hauptsächlich differentialgeometrische Probleme, welche teilweise ziemlich schwierig sind. Keinesfalls handelt es sich dabei um die bei unseren Lehramtsprüfungen meist gestellten Routineaufgaben, sondern eher um eine Art Sammlung geometrischer Miniaturen, die aber oft auch über diesen Rahmen hinausgehen und den Leser um ein gutes Stück differentialgeometrischer Forschung bereichern. Jedem Liebhaber geometrischer Fragestellungen ist dieses Buch wärmstens zu empfehlen.

K. Prachar, Wien

Vorlesungen über Integralgeometrie. Von *W. Blaschke*. Dritte Auflage. Mit 144 Textabb., VIII, 130 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 13.60.

Daß dieses Bändchen bereits in dritter Auflage erscheinen konnte, zeigt, daß auch in der heutigen abstrakten Zeit das Interesse an konkreten geometrischen Problemen allseits lebendig ist. Die neue Auflage ist der früheren gegenüber nur wenig verändert, berücksichtigt aber bereits die neueste Literatur des noch im Flusse befindlichen Gegenstandes. Wie bisher stehen im Mittelpunkt der Ausführungen mannigfache, formal eingeführte Dichtebegriffe, die durch Integration zu den entsprechenden Maßen führen, an die sich dann eine Fülle von Sätzen aus der Geometrie und der Kinematik anschließen. Bei der originellen und lebendigen Darstellungsart des Verfassers wird auch die neue Auflage in weitesten Kreisen Anklang finden.

K. Mayrhofer, Wien

Rachunek Tensorowy. Von *S. Golab*. 309 S. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. 1956.

Noch immer ist es trotz zahlreicher zur Verfügung stehender Lehrbücher für den Studierenden nicht leicht, in die Gedankengänge des Tensorkalküls einzudringen. Dies mag zum Teil auch daran liegen, daß sich in manchen Dingen eine einheitliche Bezeichnungsweise noch immer nicht durchgesetzt hat. Das vorliegende Werk gibt allen, die polnisch lesen können, eine Einführung auch in die modernen Methoden, ohne sich auf die Behandlung allzu spezieller Fragen

einzulassen. Inhalt: 1. Grundbegriffe; 2. Geometrische Objekte; 3. Affinoren; 4. Vervollständigung der Affinoralgebra; 5. Parallelverschiebung; 6. Krümmungstensor; 7. Die Metrik des Raumes; 8. Einige spezielle Räume; 9. Differentialoperatoren und Integralsätze; 10. Anwendungen der Tensorrechnung auf die Geometrie. Außer einem Literaturverzeichnis und einem Sachregister enthält das Buch auch ein Verzeichnis der wichtigsten Begriffe und Formeln, was bei dem stark formellen Charakter des Stoffes eine große Erleichterung für den Leser bedeutet. Die Darstellung ist modern und trotzdem breit und verständlich. Ein wohlgelungenes Werk, das jedem empfohlen werden kann, der in die sehr abstrakte Materie eindringen will (P. S. Die Seiten 113 bis 128 wurden — offenbar beim Binden — ein wenig permuttiert). *K. Prachar*, Wien

Cours de Cinématique. Von *R. Garnier*. Tome II: Roulement et viration. La formule de Savary et son extension à l'espace. Dritte Auflage. Mit 96 Textabb., X, 341 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956. ffr. 5000.

Der vorliegende zweite Band des dreibändigen Werkes über Kinematik ist den höheren Eigenschaften ebener, sphärischer und räumlicher Bewegungsvorgänge gewidmet, während der erste Band Grundbegriffe und niedere Eigenschaften solcher Bewegungen bringt. Im dritten Band wird schließlich die Kinematik in nicht-euklidischen Räumen behandelt.

In dem Abschnitt über ebene Kinematik von Band II stellt der Verfasser die Formel und Konstruktion von *Euler* und *Savary*, sowie auch die Konstruktion von *Bobillier* in den Mittelpunkt der Betrachtungen und beleuchtet sie beim Studium von Krümmungseigenschaften von den verschiedensten Seiten (auch in historischer Hinsicht). Daneben wird ausführlich auf die klassischen Eigenschaften ebener Bewegungsvorgänge eingegangen. — In gleicher Weise wird im nächsten Abschnitt die sphärische Kinematik behandelt (Ausdehnung der Formel von *Euler-Savary* und der Konstruktion von *Bobillier*); der Grenzübergang von der sphärischen zur ebenen Bewegung wird gezeigt. — Die räumlichen Bewegungen werden in zwei Abschnitten (Probleme erster Ordnung und Probleme zweiter Ordnung) behandelt. Dem Schroten der Achsenflächen (mit den verschiedensten Ausartungen) ist im wesentlichen der erste gewidmet, während der zweite die Krümmungstheorie zum Inhalt hat. Hiebei wird auf die Krümmungseigenschaften von Bahnkurven, auf die der Einhüllenden von Kurven und Flächen, auch bei punktweiser Berührung ausführlich eingegangen (Ausdehnung der Formel von *Euler-Savary*, Beziehung von *Disteli* usf.).

Der Verfasser legt größten Wert auf sorgfältige und strenge Herleitung aller Formeln und Ergebnisse, gibt vielfach mehrere verschiedene Beweise für einen wichtigen Lehrsatz und geht liebevoll auf Sonderfälle und Ausartungslagen ein. Die Darstellung ist analytisch, doch wird größter Wert auch auf rein geometrische Methoden gelegt.

Die 1956 erschienene dritte Auflage unterscheidet sich von den vorhergehenden durch zahlreiche wertvolle Ergänzungen.

Insbesondere der Geometer, aber auch der Techniker kann reichen Nutzen aus diesem Werk über die Kinematik der zwangsläufigen Bewegungsvorgänge ziehen. *H. R. Müller*, Berlin

Die Mechanisierung des Weltbildes. Von *E. J. Dijksterhuis*. Ins Deutsche übertragen von Helga Habicht. Mit 47 Textabb., VII, 594 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 36.—.

Das vorliegende Buch behandelt die vorbereitende Entwicklung der Naturwissenschaft (Physik, Chemie, Astronomie) von der Antike über das Mittelalter bis zum Erscheinen von Newtons Philosophiae naturalis principia mathematica im Jahre 1687 im Sinne einer Mechanisierung des Weltbildes beim Übergang von der antiken zur klassischen Naturwissenschaft Newtons. Unter Mechanisierung des Weltbildes wird dabei zunächst der etymologischen Bedeutung des Wortes Mechanik aus $\mu\eta\chi\alpha\nu\acute{\eta}$ = Werkzeug die Vorstellung erörtert, die das physische Weltall als eine große Maschine ansieht, welche nach einmaligem Antriebe auf Grund ihrer Konstruktion das Werk verrichtet, wofür sie geschaffen wurde. Natürlich ist ein solches Weltbild von dem Atomismus Demokrits himmelweit entfernt. Tatsächlich hat aber die klassische Naturwissenschaft weder einen überirdischen Schöpfer des Weltalls noch ein außerhalb des Irdischen liegendes Ziel genannt, das Er durch seine Schöpfung erreichen will, wie sie beide das Maschinengleichnis zur Voraussetzung hätten. Es war ja immer die teleologische Interpretation der gefundenen Gesetzmäßigkeiten der schwache Punkt geblieben. Wenn auch die Auffindung des Prinzips von *Maupertuis* außerhalb des in dem Buch behandelten Zeitraumes liegt, so ist doch der Hinweis darauf, daß *Leibniz* feststellte, daß das Extremum desselben, dessen Auftreten soviel Bedeutung beigemessen wurde, nicht unbedingt ein Minimum zu sein braucht, sondern ebenso gut ein Maximum sein kann, für alle Betrachtungen über die ökonomische Einrichtung des Weltenbaues von vernichtender Wirkung.

Das Wesentliche der Ersetzung der aristotelischen durch die klassische Physik wurde auch darin gesehen, daß jedes innere Veränderungsprinzip verworfen wird und daß alle Bewegungen äußeren Einflüssen zugeschrieben werden. Aber auch das stimmt nicht. Denn das Prinzip der Trägheit läßt sich zwanglos als ein inneres Bewegungsprinzip interpretieren. Es bleibt also nur eine Interpretationsmöglichkeit des Wortes mechanistisch, die darin besteht, daß man mechanistisch als „mit Hilfe der Begriffe der Mechanik" umschreibt, wobei Mechanik als die Lehre von den Bewegungen materieller Körper nach dem Newtonschen Begriffssystem aufgefaßt werden muß und die Mechanik dabei sinngemäß als eine Kinetik zu bezeichnen wäre. Aber auch das genügt nicht. Wesentlich ist, daß sich die Mechanik des Hilfsmittels der Mathematik bedient. Dabei wird der Kraftbegriff jeglicher metaphysischer Bedeutung als unbekannter Ursache einer Beschleunigung beraubt, und definiert als Produkt einer Beschleunigung (also einer rein kinematischen Größe) und einer Masse (also eines rein empirisch feststellbaren Charakteristikums jedes materiellen Körpers). Wesentlich ist dabei, daß auch die moderne Naturwissenschaft mit ihrer Relativitäts- und Quanten*mechanik* mechanistisch und damit das Weltbild mechanisiert geblieben ist.

Zusammenfassend gilt also: Die Mechanisierung, die das Weltbild beim Übergang von antiker zu klassischer Naturwissenschaft erfahren hat, besteht in der Einführung einer Naturbeschreibung mittels der mathematischen Begriffe der klassischen Mechanik; sie bedeutet den Beginn der Mathematisierung der Naturwissenschaft, die in der Physik des zwanzigsten Jahrhunderts ihre Vollendung findet.

Dies wird in historischen Einzelausführungen gezeigt, die sich folgendermaßen gliedern: Teil I: Das Erbgut des Altertums; Teil II: Die Naturwissenschaft im Mittelalter; Teil III: Die Vorbereitung und das Entstehen der klassischen Naturwissenschaft; Teil IV: Die Geburt der klassischen Naturwissenschaft (umfassend die Jahre 1543—1687).

Das Buch ist von hervorragender Lesbarkeit. Die Übersetzung wirkt wie ein Original. Ausstattung und Druck des Werkes sind einwandfrei. Also wäre dem Buche weiteste Verbreitung zu wünschen. *Th. Sexl*, Wien

Vorlesungen über Himmelsmechanik. Von *C. L. Siegel.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 85.) IX, 212 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 29.80, geb. DM 33.—.

Die Vorlesungen über Himmelsmechanik, welche der Verfasser an mehreren Orten, vor allem in Göttingen 1951/52 gehalten hat, haben das größte Interesse gefunden, und so ist es zu begreifen, daß diese Vorlesungen nun in Buchform vorliegen und dadurch allgemein zugänglich werden. Dies ist um so mehr zu begrüßen, da es sich hier um ein klassisches Gebiet der Astronomie und vielleicht noch mehr der Mathematik handelt. So interessant dieses Gebiet ist, so schwierig ist es auch. Die grundlegenden Untersuchungen von *Poincaré, Hill, Sundman, Ljapunov, Birkhoff* usw. sind mehr berühmt als bekannt. In dem vorliegenden Buche werden von dem berühmten Verfasser die gesicherten und wichtigsten Ergebnisse in einheitlicher Form mit neuen Beweismethoden auf klare und einwandfreie Weise dargestellt. Der Verfasser verwendet dabei vor allem in scharfsinniger Weise Methoden, welche sich an die in der Analysis übliche Potenzreihenmethode anschließen und erreicht dabei bedeutende Vereinfachungen.

Das erste Kapitel des Buches beginnt mit einer sehr schönen Darstellung der Hamilton-Jacobischen Theorie in Matrixform und bringt den Sundmanschen Satz zum Dreikörperproblem. Das zweite Kapitel behandelt die periodischen Lösungen beginnend mit den Lösungen von *Lagrange*; darauf folgt das Hillsche Problem, und schließlich werden auch die Kontinuitäts- und Fixpunktmethode besprochen. Das letzte Kapitel ist dem Stabilitätsproblem gewidmet, beginnt mit dem funktionentheoretischen Zentrumsproblem, bringt dann die Sätze von *Ljapunov* und *Dirichlet* und endet mit dem Poincaréschen Wiederkehrsatz.

Das vorliegende Buch ist hervorragend geschrieben und für jeden Mathematiker und Astronomen unentbehrlich. *E. Hlawka*, Wien

La Quantification en Théorie fonctionelle des Corpuscules. Von *J. L. Destouches.* VI, 142 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956. ffr. 2000.

In einer Abhandlung im Journal de Physique vom Jahre 1927 hat *Louis de Broglie* als erster einer punktförmigen Singularität, genannt Partikel, eine physikalische Welle u zugeordnet, also für das Partikel eine „funktionelle" Auffassung statt der üblichen Auffassung als Massenpunkt eingeführt. Statt der ψ-Funktion zur Beschreibung eines Massenpunktes, die nur statistisch mit den Beobachtungsdaten zusammenhängt, sollen objektive Elemente in der Wellenbeschreibung eingeführt werden. Der so gewonnene neue Quantelungsbegriff schließt im Gegensatz zu der früheren Auffassung nicht-gequantelte Bewegungen nicht aus. Vielmehr werden derartige Bewegungen für die Übergänge zu den gequantelten Bewegungen herangezogen. Diese neue Auffassung entwickelte der Verfasser hauptsächlich in Gesprächen mit *de Broglie*, mit dem Münchner Physiker *Bopp* und in Gesprächen mit den Innsbrucker Physikern und Mathematikern *Cap, March* und *Gröbner.*

In einem ersten Kapitel wird die „funktionelle" Theorie der Partikeln axiomatisch begründet und ihr Zusammenhang mit dem *de Broglie*schen Ansatz

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right) u + i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = Q(u, \nabla),$$

wo $Q(u, \nabla)$ die nichtlinearen Terme repräsentieren soll, erörtert. Das zweite Kapitel behandelt die Theorie der monochromatischen Wellen auf der neuen Grundlage, ein drittes die verschiedenen Quantisierungsmethoden in historischer Reihenfolge. Nachdem in weiteren Kapiteln Eigenschaften von Integralen der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung für u und die Eigenschaften der auftretenden Spektren erörtert wurden, werden in einem abschließenden 7. Kapitel verschiedene Näherungsmethoden zur Behandlung der partiellen Differentialgleichung diskutiert. Konkrete neue, über die übliche Theorie hinausgehende Resultate finden sich leider nicht vor, so daß eine experimentelle Entscheidung zwischen den Theorien derzeit nicht möglich erscheint. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien. I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien. IV., Schleifingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Konstruktive Geometrie für Techniker

Von

Dr. Fritz Hohenberg

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz

Mit 432 Textabbildungen. IX, 272 Seiten. Gr.-8°. 1956

Steif geheftet S 117.—, DM 19.50, sfr. 20.—, $ 4.65

Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, sfr. 22.60, $ 5.25

„Es ist zunächst eine Augenweide, das Buch nur durchzublättern. Hervorragend gezeichnete, ansprechende und sorgfältig beschriftete Figuren finden sich beinahe auf jeder Seite. Dann darf wohl festgestellt werden, daß seit längerer Zeit kein Werk ähnlichen Inhalts erschienen ist, das die Methoden der darstellenden Geometrie in enger Anlehnung an die Forderungen der Technik entwickelt, so daß das Buch sicher einem echten Bedürfnis entgegenkommt... Das Werk ist in drei Hauptteile gegliedert: Im ersten werden die Projektionsarten, Normal-, Schräg- und Zentralrisse mit einem kurzen Exkurs über die Photogrammetrie behandelt, im zweiten werden technisch wichtige Kurven und Flächen untersucht, der dritte Teil führt in die kinematische Geometrie ein, die auf Getriebe und Verzahnungen angewendet wird. Besonders liebevoll sind die Abschnitte über Perspektiven, Schraubenflächen und Gelenkkurven betreut. Die meisten der erstaunlich vielen Beispiele sind Architektur, Tiefbau und Maschinenbau entnommen. Das prächtige Buch wird sowohl dem Lernenden nützlich sein als auch dem Lehrer eine Fülle von Anregungen bieten."

Elemente der Mathematik

Die Technik der Negativ- und Positivverfahren

Von

Dr. Edwin Mutter

Hamburg

(Die wissenschaftliche und angewandte Photographie, Band V)

Mit 91 Textabbildungen. XX, 396 Seiten. Gr.-8°. 1955

Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, $ 15.70

„... Der Band V dieser Reihe von *E. Mutter* erfüllt die Wünsche der Praktiker, endlich ein Buch über die Negativ- und Positivverfahren, das dem Stand der heutigen Technik entspricht, zu erhalten, nachdem die deutschsprachige Literatur hier eine große Lücke aufwies. Die ersten drei Kapitel umfassen die theoretischen Grundlagen des photographischen Prozesses, eine ausführliche Chemikalienkunde und die heutige Anschauung über die Entstehung des latenten Bildes. Es folgen neun Kapitel über den Negativentwicklungsprozeß in Theorie und Praxis mit allen Besonderheiten wie Desensibilisierung und Hypersensibilisierung sowie eingehende Beschreibung von Fixierung, Wässerung, Trocknung und Korrektur des Negativs. Die Positivtechnik konnte entsprechend kürzer dargestellt werden und es war dafür möglich, mehr Raum den Vorschriften und Rezepturen zu bieten. Ein letztes Kapitel handelt von Fehlern in Negativ und Positiv, gefolgt von einem Anhang mit Tabellen über Maßsysteme, Konstanten usw. Das Literaturverzeichnis nennt über 700 Zitate und zeigt, wie sehr sich der Autor darum bemüht hat, die Erfahrungen der Weltliteratur zu verwerten, wovon in erster Linie die seriösen Praktiker profitieren werden ..." *Angewandte Chemie*

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Einführung in die mathematische Statistik

Von

Dr. Leopold Schmetterer

Professor an der Universität Wien

Mit 13 Textabbildungen. XXIII, 405 Seiten. Gr.-8°. 1956

Ganzleinen S 294.—, DM 49.—, sfr. 50.10, $ 11.65

„... Der Verfasser sagt selbst, daß sich sein Buch in erster Linie an den Mathematiker und an den mathematisch interessierten Statistiker wende. So besehen, ist es ein ganz ausgezeichnetes Werk und erstmalig in der deutschsprachigen Literatur. In sieben Kapiteln werden die Theorien der empirischen Wahrscheinlichkeit, der Stichproben, der Konfidenzbereiche, der Parameterschätzung, der statistischen Tests, der Regression, der Stichproben mehrdimensionaler Normalverteilungen und der parameterfreien Methoden behandelt. Für das Studium des Buches wird die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung sowie der elementaren Mengen- und Matrizentheorie vorausgesetzt. Was es besonders auszeichnet, ist der Umstand, daß für alle Sätze, die sich auf die mathematische Statistik beziehen, vollständiger Beweis geführt wird." *Elemente der Mathematik*

Einleitung. — Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Verteilungsfunktion einer zufälligen Variablen. — Unabhängige zufällige Variable. — Randverteilung. — Bedingte Verteilung. — Funktionen zufälliger Variabler. — Erwartungswert. — Momente. — Charakteristische Funktion. — Summen zufälliger Variabler. — Die wichtigsten ein- und mehrdimensionalen Verteilungen und ihre Eigenschaften. — Zentraler Grenzwertsatz.

Elementare Stichprobentheorie. Prüfen von Mittelwert und Streuung normalverteilter Grundgesamtheiten. — Stichprobentheorie endlicher Grundgesamtheiten. — Einfacher Stichprobenplan. — Geschichtete, proportionale, optimale Stichprobenauswahl. — Mehrstufenverfahren.

Konfidenzbereiche. Begriff des Konfidenzintervalles. — Konstruktion von Konfidenzintervallen. — Allgemeine Konfidenzbereiche und ihre Klassifikation. — Trennscharfe und reguläre Konfidenzbereiche. — Konfidenzbereiche vom Typ A und A_1. — Konstruktion von Konfidenzbereichen vom Typ A_1.

Theorie der Parameterschätzung. Konsistente, erwartungstreue, wirksame und erschöpfende Schätzfunktionen. — Zusammenhang zwischen erwartungstreuen und erschöpfenden Schätzfunktionen. — Das Maximum Likelihood-Prinzip. — Die asymptotischen Eigenschaften der Maximum Likelihood-Schätzungen. — Zusammenhang zwischen Maximum Likelihood-Schätzungen, wirksamen und erschöpfenden Schätzfunktionen.

Einführung in die Testtheorie. Grundlagen der *Neyman-Pearson*schen Testtheorie. — Die Gütefunktion. — Klassifikation der Teste. — Konstruktion trennscharfer Teste. — Konstruktion ähnlicher kritischer Regionen. — Strenge Teste nach *Wald*. — Der Maximum Likelihood-Quotiententest. — Erweiterungen der *Neyman-Pearson*schen Theorie.

Regressionstheorie und Stichprobentheorie mehrdimensionaler Normalverteilungen. Die Methode der kleinsten Quadrate. — Verteilung von *Hotelling* und *Wishart*. — Die verallgemeinerte Distanz von *Mahalanobis*. — Die allgemeine Regressionstheorie.

Einführung in die nichtparametrischen Theorien. Geordnete Schätzfunktionen. — Das asymptotische Verhalten ihrer Verteilungen. — Konfidenzbereiche für Verteilungsfunktionen. — Theorie der Iterationen. — Test von *Wilcoxon*. — Symmetrietest von *Hemelrijk*. — Die Methode von *Robbins* und *Monro* als Beispiel einer parametrischen sequentiellen Schätzungsmethode.

Die klassische *Bayes*'sche Methode.

Namen- und Sachverzeichnis

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung